Heine-Borels sats:

F sluten begr mängd av reella tal

$\mathcal{E}$ öppen övertäckning av F: $F \subset \bigcup\{O : O \in \mathcal{E}\}$

$\Downarrow$

$\exists\, [a,b]:\ [a,b] \supset F$, $-\infty < a < b < \infty$

$\mathcal{E}^* = \mathcal{E} \cup \{\tilde{F}\}$

$\Downarrow$

$\mathcal{E}^*$ ö. övert. av $[a,b]$

$\mathcal{E}$ ö. övert. av F

$F \cup \tilde{F} = \mathbb{R}$

$\mathcal{E}^*$ ö. övert. av $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\mathcal{E}^*$ ö. övert. av $[a,b]$

$\Downarrow$

$\exists$ ändlig ö. övert. ur $\mathcal{E}^*$: $\{O_i\}_1^n$ av $[a,b]$

$\Downarrow$

$\{O_i\}_1^n$ ändl. är ö. övert. ur $\mathcal{E}^*$ av F

$\tilde{F} \notin \{O_i\}_1^n$ | $\tilde{F} \in \{O_i\}$

Låt $\tilde{F} = O_n$

$\{O_i\}_1^n$ ändl. ö. övert ur $\mathcal{E}$ av F

$\{O_i\}_1^{n-1}$ ändl. ö. övert ur $\mathcal{E}$ av F

$\exists$ ändlig öppen övertäckning ur $\mathcal{E}$ av F

Antag $F = [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$

börja snabbt!

Låt $E = \{x : x \leq b$ och $[a,x]$ har ändl. övert. ur $\mathcal{E}\}$

$\Downarrow$

E uppåt begränsad av b

$\Downarrow$

$\exists \sup E = c$

$\Downarrow$

$c \in [a,b]$

$\Downarrow$

$\exists\, O \in \mathcal{E} : c \in O$

$\Downarrow$

O öppen: $\exists\, \varepsilon > 0 : (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset O$

$\Downarrow$

$\exists\, x \in (c-\varepsilon, c)$: $\bigcup_1^k O_i \supset [a,x]$

$\Downarrow$

$\bigcup_1^k O_i \cup O \supset [a, c+\varepsilon]$

$\Downarrow$

$c = b$

$\Downarrow$

$\exists$ ändlig öppen övertäckning ur $\mathcal{E}$ av $[a,b]$

2

2.5.1.

$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow |u(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha| \le k} \sup |\partial^\alpha \varphi|$

Låt $x \to x_0$

$\partial_y^\alpha (\varphi(x-y) - \varphi(x_0-y)) \to 0$ likf. $\forall \alpha$.

Tag K kompakt omgivning till x_0!

Tag $x_0 \in K$

$\operatorname{supp}_y \varphi(x-y) \subset K - \operatorname{supp}\varphi$ kompakt

ej "men inte" !!!

Tag $y \in \operatorname{supp}\varphi(x-y)$

$\Downarrow$

$\cancel{\varphi(x-y) \ne 0}$

$\Downarrow$

$x - y \in \operatorname{supp}\varphi$

$y \in \{x\} - \operatorname{supp}\varphi \subset K - \operatorname{supp}\varphi$

$\Downarrow$

$y \in K - \operatorname{supp}\varphi$

$u * \varphi$ kont.

Tag e_k k:te ~~enhets~~ vektorn

$\Downarrow$

$\dfrac{\varphi(x+he_k-y) - \varphi(x-y)}{h} \xrightarrow{\text{likf.}} \partial_k \varphi(x-y)$ på kompakt

$|u*\varphi(x+h) - u*\varphi(x)| \le$

$\le |u(\varphi(x+h-\cdot) - \varphi(x-\cdot))| \le$

$\le C \sum_{|\alpha| \le k} \sup |\partial^\alpha (\varphi(x+h-y) - \varphi(x-y))|$

$\Downarrow$

$\partial_k (u*\varphi)(x)\ \exists$,

$\partial_k (u*\varphi)(x) = (u * \partial_k \varphi)(x)$

$\Downarrow$

$u * \varphi \in C^1 \xrightarrow[\substack{\partial^\alpha u \\ |\alpha|=1}]{\text{2.5.1 på}} u * \varphi \in C^\infty$

2.1.9.

$\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset \Rightarrow u(\varphi) = 0$

$\Downarrow$

$\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi(x-\cdot) = \emptyset\ \forall x \Rightarrow u(\varphi(x-\cdot)) = 0\ \forall x$

Tag x: $u*\varphi(x) \ne 0$

annars $u(\varphi(x-\cdot)) = 0$, motsäger $x \in \operatorname{supp} u*\varphi$

$\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}\varphi(x-\cdot) \ne \emptyset$

$\Downarrow$

$\exists y$: $y \in \operatorname{supp} u$, $x - y \in \operatorname{supp}\varphi$

$\Downarrow$

$x \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi$

~~$\operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi$ sluten~~

$A \subset S$

$\Downarrow$

$\overline{A} \subset S$

om S sluten

$\operatorname{supp}(u*\varphi) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi$

Nej!

$A = \{1, 2, \ldots\}$

$B = \{2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{3}, 4 - \frac{1}{4}, \ldots\}$

A, B slutna, men $A + B \not\ni 0 \in \overline{A+B}$!

Men: $\left.\begin{array}{l} A \text{ sluten} \\ B \text{ kompakt} \end{array}\right\} \Rightarrow A + B$ sluten.

$$\boxed{u*\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} u*\varphi \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi, \quad \partial^\alpha(u*\varphi) = \partial^\alpha u * \varphi = u * \partial^\alpha \varphi}$$

3

$\boxed{L : H \to \mathbb{C} \text{ kont., linj. funktional}}$

$Lx \neq 0$ ngt $x \in H$

Sätt $M = \{x : Lx = 0\}$

L kont.

M slutet

$\Downarrow$ L linj.

M underrum till H

4.11
$M \neq H$
$\Rightarrow \exists y \neq 0$
$y \perp M$

$M^\perp \neq \{0\}$

$\Downarrow$

$\exists\, z \in M^\perp : \|z\| = 1$

$(z,z) = 1$

Sätt $u = (Lx)z - (Lz)x$

$\Downarrow$

$Lu = 0$

$\Downarrow$

$u \in M$

$\Downarrow$

$(u,z) = 0$

$(Lx)(z,z) = Lz(x,z)\ \forall x$

$Lx = (Lz)(x,z)\ \forall x \in H$

$\Downarrow$

Tag $y = \overline{Lz}\, z$

$Lx = 0\ \forall x \in H$

Tag $y = 0$

Antag
$(x,y) = (x,y')\ \forall x \in H$

$\Downarrow$

Sätt $z = y - y'$

$\Downarrow$

$(x,z) = 0\ \forall x \in H$

$\Downarrow$

Spec $(z,z) = 0$

ent.

$\boxed{\exists \text{ \underline{ent.} } y \in H : Lx = (x,y)\ \forall x \in H}$