

# Periodiska systemet för matematiska funktioner

## hur fungerar det?

*Håkan Lennerstad*

### Inledning

En relativt liten grupp matematiska funktioner dyker upp på olika sätt i alla möjliga sammanhang där matematik används. Det är bra att känna till denna grupp av funktioner väl, och vilka egenskaper de har.

Syftet med det periodiska systemet för matematiska funktioner är att sammanställa egenskaperna för de vanligaste funktionerna så lättillgängligt som möjligt. Och göra det möjligt att jämföra dessa egenskaper med grafernas form, och med andra funktioner. Allt för att lära känna dem. Systemet innehåller enormt mycket fakta, i en enda stor affisch.

Affischen innehåller 116 funktioner, varav ca 40 förekommer mycket ofta. De viktigaste hittar man vanligen i systemets vänstra sida. De andra förekommer ibland och är relaterade till dessa, därmed beskriver även de viktigaste indirekt. I olika sammanhang där matematik används möter man summor av funktionerna, produkter av dem, kvoter av dem, sammansättningar av dem, faltningar av dem, men de tar alltid med sig sina karaktäristiska egenskaper. De är lika eviga och oföränderliga som grundämnena i Dmitrij Mendelevs berömda periodiska system, som han presenterade 1869.

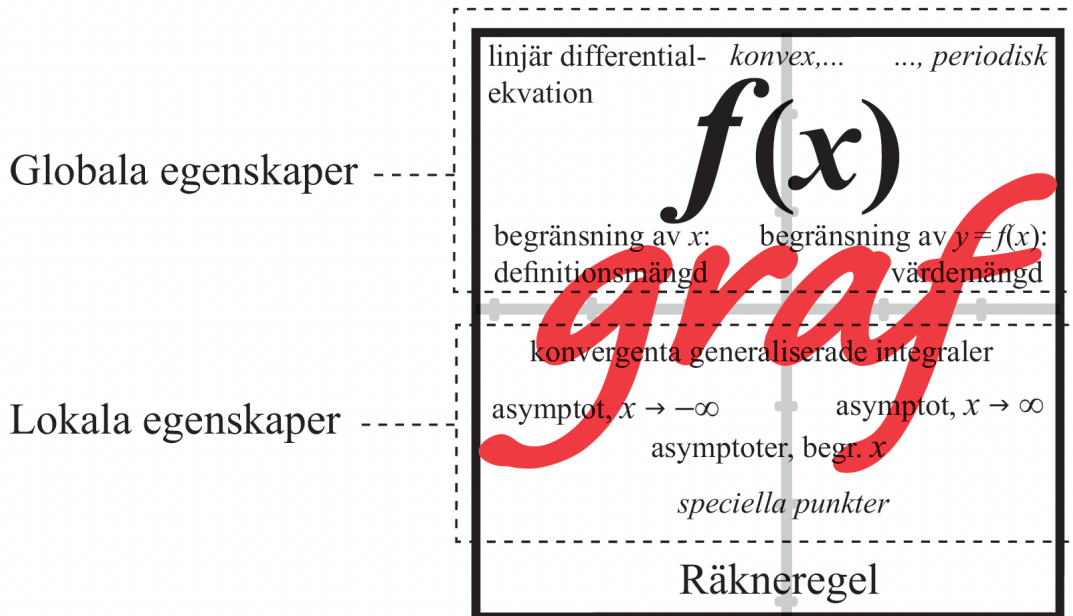
Varje funktion har en egen ruta. I den rutan finns information om just den funktionens egenskaper. Här finns dess namn och graf synliga på framträdande sätt. Och varje egenskap som funktionen har är noterad i rutan med en särskild symbol – varje egenskap har en särskild symbol. Varje symbol har dessutom en särskild plats i rutan, så om det är tomt på den platsen har funktionen inte denna egenskap.

Allt som finns i rutan beskriver funktionen – det är en grundprincip. En del av detta är linjer till andra funktioner som startar eller slutar i rutan, nämligen vilka andra funktioner den är relaterad till.

I övre delen av rutan står *globala egenskaper* – de som inte endast gäller en enskild punkt. Ett exempel på det är en jämn funktion, som är oförändrad om man speglar den i y-axeln. Ett annat är om den är lösning till en differentialekvation.

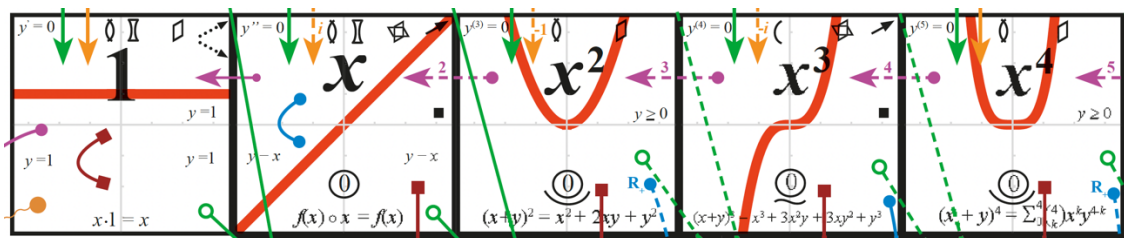
I nedre delen finns *lokala egenskaper* – funktionsegenskaper i enskilda punkter. Ett exempel på det är om funktionen skär x-axeln i en punkt: funktionen har ett nollställe i den punkten.

Dessutom finns sju olika *relationer* mellan funktioner markerade, som är pilar eller linjer mellan respektive rutor. Varje relation har en särskild färg. Mer om det nedan!



### Familjer och egenskaper

För att få bättre överblick är funktionerna organiserade i tretton familjer. De enklaste funktionerna är kanske 1 och  $x$ . Om de adderas med reella koefficienter, t.ex.  $k$  och  $m$ , så bildar de alla räta linjer genom  $kx + m$ . Läger vi till en term med  $x^2$  så får vi med alla parabler. Detta är starten på den första familjen, de Naturliga potenserna:  $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots$  Vilka egenskaper har de?

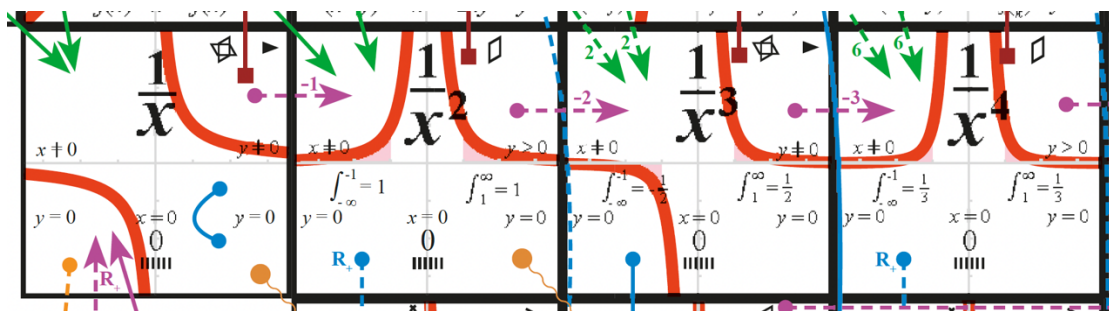


Uppenbart har alla naturliga potenser *nollställen* när  $x = 0$ , utom den första funktionen, som är konstant lika med 1. Varannan,  $x^2, x^4, x^6$ , har ett *minimum* i  $x = 0$ , och de andra  $x, x^3, x^5$  har en *inflektionspunkt* där. De jämna potenserna är *jämna* funktioner (symmetriska i  $y$ -axeln), de udda är *udda* funktioner (symmetriska i spegling i origo, eller rotation  $180^\circ$  runt origo). De jämna är dessutom *konvexa*, medan de udda varken är konvexa eller *konkava*. De udda är däremot alla *strängt växande*, medan ingen av dem är *strängt avtagande*.

De egenskaper som är skrivna kursivt ovan är markerade för alla funktioner i systemet, om de har respektive egenskap. Inte bara för de Naturliga potenserna.

Dessa funktioner har alla *definitionsområde*  $\mathbf{R}$  (reella talen). De jämna har *värdemängd*  $x \leq 0$  medan de udda har värdemängd  $\mathbf{R}$ . De är lösningar till (mycket triviala) *linjära differentialekvationer*, exempelvis är  $y = x^2$  är lösning till  $y''' = 0$ . Funktioner i andra familjer är lösningar till mindre triviala differentialekvationer.

Nästa familj är de Negativa Heltalspotenserna:  $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, \dots$

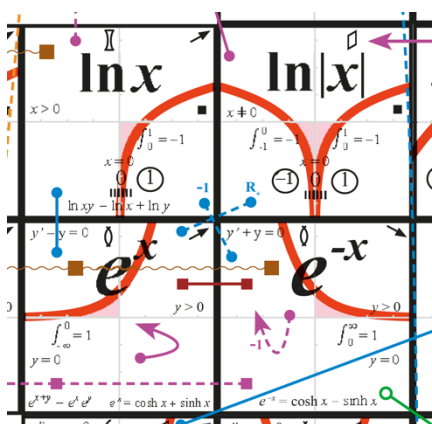


De har några egenskaper som ingen av de Naturliga potenserna har. Exempelvis är  $x = 0$  en *singulär punkt* för dem alla. Det är också så att alla utom  $x^{-1}$  har någon *konvergent generaliserad integral*, markerat med en rosa yta. Ett exempel på det är integralen av  $x^{-2}$  från 1 till  $\infty$ , som är konvergent med värdet 1, trots att integrationsintervallet är oändligt långt (därför kallas den generaliserad). De har också *asymptoter*,  $x = 0$  och  $y = 0$ , som kan beskrivas som "tangenter till kurvan oändligt långt från origo". De är en sorts lokala egenskaper i punkterna  $x = -\infty$  och  $x = \infty$ . De udda negativa heltalspotenserna är *injektiva* (ett-ett) utan att vara växande eller avtagande.

De två nästa familjerna, nummer tre och fyra, är Singulära rötter,  $x^{-a}$  där  $a$  är rationellt och positivt men inte ett heltal, och Icke-singulära rötter:  $x^a$ . Ett exempel är tredjeroten  $x^{1/3}$  som i origo kontinuerlig med en inflexionspunkt men samtidigt lodrät lutning: *odefinierad derivata* i punkten.

Kuben  $x^3$  och tredjeroten  $x^{1/3}$  är förstås varandras inverser, vilket markeras med en blå linje mellan dem. Inverssamband är blå linjer. Men hur är det med kvadraten  $x^2$  och roten  $x^{1/2}$ ? Det är ett större problem, för  $x^2$  är ju inte inverterbar.

Men dess restriktion till positiva reella axeln är inverterbar. Mängden positiva reella tal betecknas  $\mathbf{R}_+$ . Det ger oss här en ofullständig relation, en streckad linje, där den begränsade definitionsmängden är angiven vid pilens början. För denna restriktion, dvs för  $x^2$  med definitionsmängden  $\mathbf{R}_+$ , är  $x^{1/2}$  verkligen invers. Och inversen till  $x^{1/2}$  är denna funktion. Derivatans av  $x$  är 1, så det är en lila pil från  $x$  till 1. Derivatans av  $x^2$  är  $2x$ , inte  $x$ . Här har vi en annan ofullständig relation: vi behöver komplettera med den konstanta faktorn 2 för att derivatan ska vara rätt. Därför är det en streckad lila pil från  $x^2$  till  $x$  med faktorn 2 vid pilens slut. Så på det sättet får vi rätt faktor ändå.



Familj nummer 5 är Logaritmfunktionerna. De tre viktigaste logaritmerna, med bas 10, 2 och  $e$ , är med. De är dilat av varandra, dvs sammanpressning/utdragning i sidled.

Det finns en stark länk från denna familj till Familj 2, de Negativa heltalspotenserna, genom att derivatan av  $\ln|x|$  är  $1/x$ . Funktionen  $x(\ln|x| - 1)$  har derivata  $\ln|x|$  och är också med därför. Även nästa steg på denna kedja, som är  $x^2(\ln|x| - 3/2)$ . Övriga funktioner i denna familj, funktioner som domineras av en logaritm, är relaterade till andra familjer (Familj 7 och 11) genom invers eller derivata. Funktionerna  $\ln x$  och  $\ln|x|$  är båda speciella och viktiga –

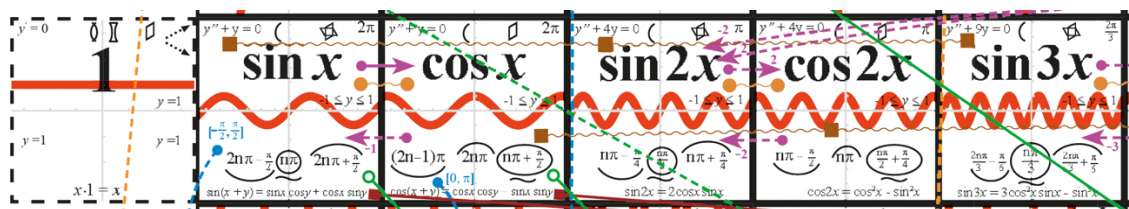
den ena invers till  $e^x$ , den andra primitiv funktion till  $1/x$ . De har ganska olika globala egenskaper:  $\ln x$  är konkav och strängt växande, som  $\ln|x|$  inte är. Den är däremot en jämn funktion.

Inverserna till  $\lg x$ ,  $\log_2 x$  och  $\ln x$  leder till  $10^x$ ,  $2^x$  och  $e^x$ , som är starten på Familjen 6, Exponentialfunktioner. Den avtagande  $e^{-x}$  är så vanligt förekommande, t.ex. som lösning till differentialekvationer, att den också är med.

Relationen mellan  $\ln x$  och  $e^x$  föreslår samband mellan en funktion och dess invers: om den ena är konkav, är den andra konvex? Om den ena är växande, är den andra också växande? Det är ett litet exempel på hur denna sammanställning, detta periodiska system, lätt väcker matematiska frågor att undersöka.

Hos Exponentialfunktionerna finns också funktionerna  $e^{-|x|}$ ,  $e^{-x^2}$  och  $\Phi(x)$ , där den sistnämnda beskriver normalfördelningen.

Familj 8, de Hyperboliska funktionerna, är på flera sätt ett mellanting mellan exponentialfunktioner och nästföljande familj, som består av trigonometriska funktioner. De mest kända hyperboliska funktionerna är  $\sinh x$  och  $\cosh x$ , som är varandras derivata. Funktionen  $\operatorname{sech} x (= 1/\cosh x)$  är en av fyra funktioner i detta periodiska system som har en generaliserad integral från  $-\infty$  till  $\infty$  med värdet  $\pi$ . Deras inverser återfinns i Familj 5, Logaritmfunktioner.

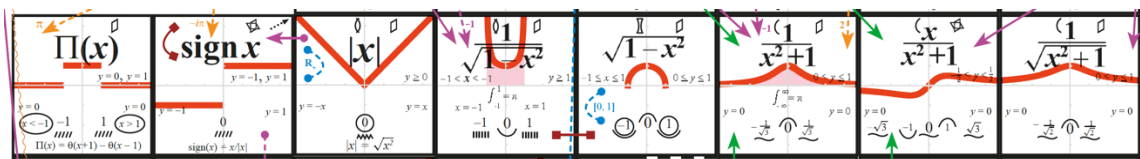


Nästa familj, Familj 8, är de Begränsade trigonometriska funktionerna. De har en egenskap som ingen funktion har i familj 1-7: de är periodiska. Detta anges med att funktionens period står på den plats där pilen för växande/avtagande annars finns. Det kan man göra eftersom en funktion kan inte vara både periodisk och växande/avtagande.

Flera av dessa funktioner är translaterat, dilat eller derivator av varandra. Tillsammans med funktionen 1 bildar de grunden för Fourierserier, där man kan skriva (nästan) vilken periodisk funktion som helst som en linjärkombination av dem. De viktiga funktionerna  $\cos^2 x$  och  $\sin^2 x$  är också med, samt  $\frac{\sin x}{x}$ .

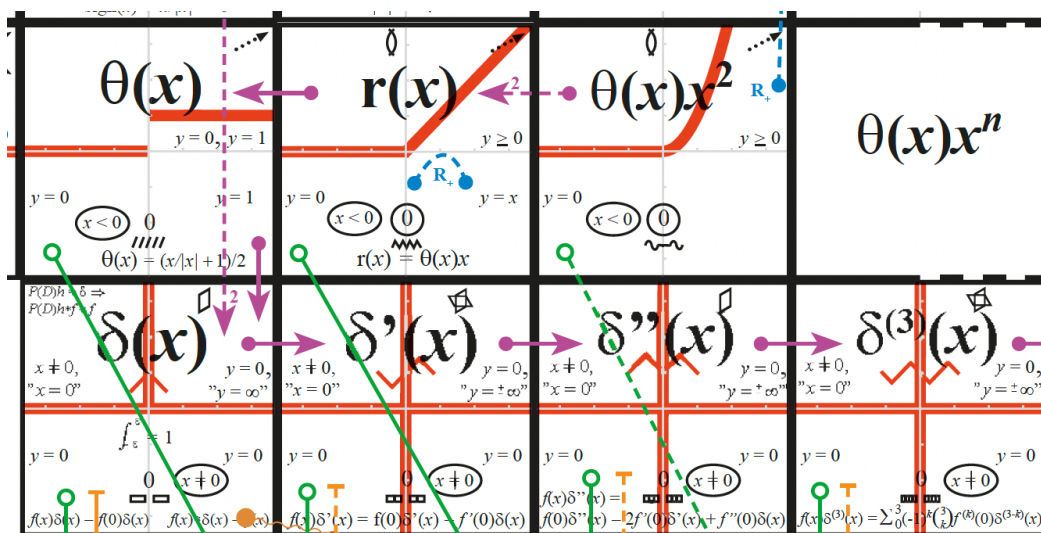
Familj 9 är de Singulära trigonometriska funktionerna, trigonometriska funktioner som har singulära punkter. De är också periodiska.

Familj 10 är trigonometriska inverser, som inte är periodiska, men inverser bara till en hel eller halv period av funktioner i de två föregående familjerna. De har också kopplingar till nästa familj, Familj 11: Speciella rötter och rationella funktioner. Ett viktigt exempel på det är  $\arctan x$ , som är primitiv funktion till  $1/(x^2 + 1)$  från Familj 11. En märkligt isolerad medlem i Familj 11 är halvcirkeln  $\sqrt{1-x^2}$ , som endast är relaterad till  $1/\sqrt{1-x^2}$  – vilken i sin tur är derivata till  $\arcsin x$ . Ett udda exemplar i Familj 10 är  $\operatorname{arccot} x$ , invers till en restriktion till  $\cot x$ , vanligen definierad så att  $\operatorname{arccot} x$  är diskontinuerlig! En invers till intervallet  $(0, \pi)$  för  $\cot x$  är däremot kontinuerlig.



Familj 11 innehåller många användbara funktioner som inte naturligt hör hemma i andra familjer. En sådan är  $|x| = \sqrt{x^2}$  som alltså är en sorts kvadratrots. En annan är  $\Pi(x)$ , så benämnd för dess graf liknar bokstaven  $\Pi$ . Så när som en faktor  $\pi$  är  $\Pi(x)$  Fouriertransform till  $\frac{\sin x}{x}$ , ibland benämnd sinc x. Det är en funktion i Familj 8 som spelar stor roll i signalbehandling.

Familj 12 är kausala funktioner, som alla är 0 för negativa x. Detta gör att många symmetriegenskaper faller. En viktig kausal funktion är stegfunktionen  $\theta(x)$ , som är 1 om x är positiv. Denna funktion är inte deriverbar, den är inte ens kontinuerlig, men har ändå "derivata" (med citationstecken) i "funktionen"  $\delta(x)$ , som är den ledande funktionen i den sista familjen, Familj 13.



Familj 13, Impulsfunktioner, är inte funktioner i vanlig mening, utan s.k. generaliserade funktioner (kallas ibland "distributioner"). De är varianter av en s.k. impulsfunktion  $\delta(x)$ . Denna är noll för alla x utom  $x = 0$  då den är  $\infty$ , dock på ett sådant sätt att varje integral av funktionen som innehåller  $x = 0$  har värdet 1. Detta krav gör att  $\delta(x)$  inte är en funktion i strikt mening.

Den generaliserade funktionen  $\delta(x)$  kan konstrueras exempelvis med funktionen  $f_1(x) = e^{-x^2} / \sqrt{2\pi}$ , som är positiv och har area 1. Om denna funktion pressas ihop i sidled till  $f_\epsilon(x)$ , man kan tänka sig bredd  $\epsilon$ , och dras ut uppåt på så sätt att arean alltid är 1, så ger detta  $\delta(x)$  när bredden  $\epsilon$  går mot noll (och samtidigt höjden mot  $\infty$ , så arean hela tiden är 1). Om samma procedur görs med  $f'_\epsilon(x)$  så ger det "derivatan"  $\delta'(x)$  och på analogt sätt kan man få "andradderivatan"  $\delta''(x)$ . I Familj 12 och 13 finns en linje av deriveringar åt vänster som startar i  $\theta(x)x^2$ , vänder i  $\theta(x)$  och  $\delta(x)$ , och fortsätter åt höger i impulsfunktionernas derivator.

Både  $\delta(x)$  och  $\delta'(x)$  är mycket användbara i många tillämpningar:  $\delta(x)$  för punktmassor och  $\delta'(x)$  för dipoler, men även i signalbehandling för att hantera elektroniska signaler. Deras Fourier- och Laplacetransformer återfinns i Familj 1, de Naturliga potenserna, och med dem är vi tillbaka i periodiska systemets första familj!

### Egenskaper

Här är de lokala egenskaperna med sina symboler och geometrisk beskrivning, om det finns en kort sådan:

**Lokala egenskaper**

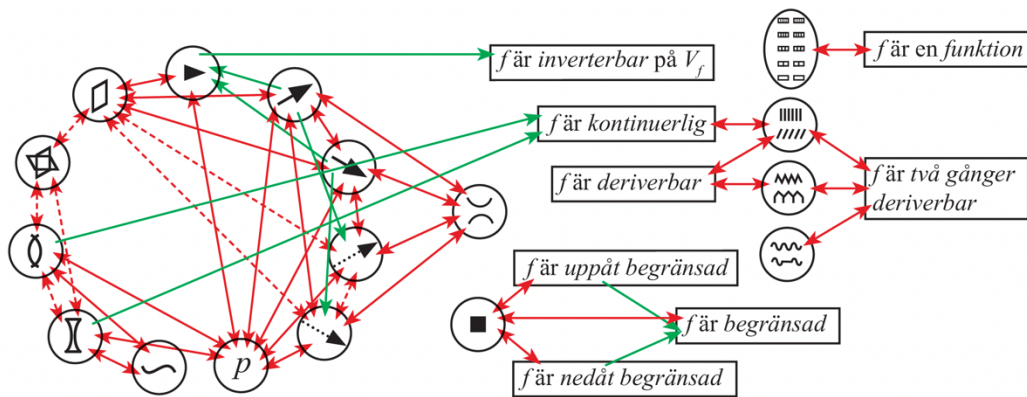
- nollställe – skärning med  $x$ -axeln
- ∪ lokalt minimum – lägsta punkt i sänka
- ∩ lokalt maximum – högsta punkt på kulle
- ∩ inflektionspunkt – byte höger/vänstersväng
- ~ begr. diskont.  $f''$  men kontinuerlig  $f'$
- ~ obegr. diskont.  $f''$  men kontinuerlig  $f'$
- ⋈ begr. diskont.  $f'$  men kontinuerlig  $f$  – hörn
- ⋈ obegränsad  $f'$  men kontinuerlig  $f$  – brant
- ⋈ begränsad diskontinuitet – språng
- ⋈ obegränsad diskontinuitet – grafen utanför alla fönster
- == impulsiv singularitet, ordn. 1 – punktmassa
- == impulsiv singularitet, ordn. 2 – dipol
- == impulsiv singularitet, ordn. 3
- == impulsiv singularitet, ordn. 4
- == impulsiv singularitet, ordn. 5
- $n$  heltal
- $k$  icke-negativt heltal
- $\epsilon$  litet positivt tal
- ▭ Konvergent generaliserad integral - yta med ändlig area men oändlig utsträckning
- Asymptot - tangent i oändligheten

Och motsvarande för de globala egenskaperna:

**Globala egenskaper ( $x_1 < x_2$ )**

- ∩ kontinuerlig  $f(x) \rightarrow x_0$  då  $x \rightarrow x_0$  – sammanhängande
- ∩ konvex  $f(tx_1+sx_2) \leq tf(x_1)+sf(x_2)$  – sammanhängande, inga högersvängar
- ∩ konkav  $f(tx_1+sx_2) \geq tf(x_1)+sf(x_2)$  – sammanhängande, inga vänstersvängar
- ∩ udda  $-f(-x) = f(x)$  – oförändrad vid rotation ett halvt varv runt mittpunkten
- ∩ jämn  $f(-x) = f(x)$  – symmetrisk kring den vertikala mittlinjen
- ↗ strängt växande  $f(x_1) < f(x_2)$  – uppförsbacke åt höger, ingen plåtå
- ↘ strängt avtagande  $f(x_1) > f(x_2)$  – nedförsbacke åt höger, ingen plåtå
- ↗ växande  $f(x_1) \leq f(x_2)$  – uppförsbacke åt höger, plåtå kan finnas
- ↘ avtagande  $f(x_1) \geq f(x_2)$  – nedförsbacke åt höger, plåtå kan finnas
- ▶ injektiv  $f(x_3) = f(x_4) \Rightarrow x_3 = x_4$  – varje horisontell linje har högst en skärning med kurvan
- surjektiv på  $\mathbf{R}$   $f(D_f) = \mathbf{R}$  – varje horisontell linje har minst en skärning med kurvan
- $p$  periodisk, period  $p$   $f(x+np) = f(x)$  – ett stycke av längd  $p$  upprepas ständigt
- upåt begränsad  $y < b$  (något  $b$ ) – hela kurvan är nedanför en viss höjd
- nedåt begränsad  $y > a$  (något  $a$ ) – hela kurvan är ovanför en viss höjd
- begränsad  $a < y < b$  (något  $a$  och  $b$ ) – hela kurvan är mellan två nivåer

Det finns ett antal samband mellan dessa egenskaper:



1. Uteslutande:  $e_1 \leftrightarrow e_2$ , ingen funktion har både egenskaperna  $e_1$  och  $e_2$ .
2. Nästan uteslutande:  $e_1 \leftrightarrow e_2$ , ingen funktion har både egenskaperna  $e_1$  och  $e_2$  utom räta linjer.
3. Inkluderande:  $e_1 \rightarrow e_2$ , varje funktion som har egenskapen  $e_1$  har även egenskapen  $e_2$ . I sådana fall är endast egenskap  $e_1$  noterad.
4. Kombinerat inkluderande:  $e_1 \rightarrow e_3$  (sammanfallande pilspetsar): egenskapen  $e_3$  följer av egenskaperna  $e_1$  och  $e_2$ .

Ändliga si

Många av dessa pilar är satser som bevisas i matematiklitteraturen, som t.ex. ”Om  $f(x)$  är injektiv så är  $f(x)$  inverterbar.” eller ”Om  $f(x)$  är konvex har den ingen inflexionspunkt.”

## Relationer

Här sammanfattar vi relationerna.

Om en funktion är *derivatan* av en annan så är det en lila pil från den andra till den första.

*Fouriertransform* markeras med orange pil och *Laplacetransform* med grön pil.

De övriga fyra relationerna har inte någon riktning, utan det handlar om två funktioner som hör ihop som ett par. De förbundna med en linje utan pil. Det gäller om de är varandras *inverser* (blå linje), *inverterat värde* (röd linje), *translat* (ljusbrun linje) eller *dilat* (mörkbrun linje).

En kurva är ett *translat* av en annan om kurvan bara är förflyttad utan annan förändring.

En kurva är ett *dilat* av en annan om kurvan är hoppresad eller utdragen.

Förbindelselinjen i en relation är streckad om den är ofullständig.

En invers är ofullständig om den gäller en restriktion av funktionens definitionsmängd. Då är den definitionsmängden markerad i blått där linjen börjar/slutar.

Övriga relationer är ofullständiga om funktionen inte har rätt konstant faktor. Då är den faktor som saknas angiven i samma färg vid linjen.

Här är en sammanställning.

Relation	komplett	inkomplett	definition
<b>Invers funktion</b>	$f(x) \text{ --- } f^{-1}(x)$	$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$	
	– vänd i diagonalen, från nedre vänstra hörnet till övre högra		
<b>Inverterat värde</b>	$f(x) \text{ --- } 1/f(x)$	$1/(1/f(x)) = 1/f(x)$	
	– invertera vertikalt i linjen $x = 1$ eller $x = -1$		
<b>Derivata</b>	$f(x) \text{ --- } f'(x)$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x))/h$	
	– värdet $f'(x)$ anger hur mycket $f(x)$ lutar i $x$		
<b>Laplace transform</b>	$f(x) \text{ --- } \mathcal{L}[f](x)$	$\mathcal{L}[\mathcal{L}[f](x)] = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt$	
	– värdet $\mathcal{L}[f](x)$ anger hur mycket av ”frekvensen” $x$ som finns i funktionen $f$ , som summa av $\theta(x)e^{-x}$		
<b>Fourier transform</b>	$f(x) \text{ --- } \mathcal{F}[f](x)$	$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f](x)] = \int_{-\infty}^\infty e^{-itx} f(t) dt$	
	– värdet $\mathcal{F}[f](x)$ anger hur mycket av frekvensen $x$ som finns i funktionen $f$ , som summa av $\cos x + i \sin x$		
<b>Dilat</b>	$f(x) \text{ --- } bf(ax)$ , för tal $a, b$ ej båda 1, ingen 0		
	– $bf(ax)$ är hoptryckt eller utdragen, vertikalt ( $b$ ) och/eller horisontellt ( $a$ ) ( <i>skalning</i> om $ab = 1$ )		
<b>Translat</b>	$f(x) \text{ --- } f(x - a) + b$ , för tal $a, b$ ej båda 0		
	– $f(x - a) + b$ är förflyttad utan formförändring, vertikalt ( $b$ ) och/eller horisontellt ( $a$ )		

## Om relationer

1. En relation som är inkomplett gäller för en del (restriktion) av funktionen, eller med andra konstanta faktorer, dvs för ett dilat. Faktorerna  $b$  respektive  $a$  finns vid relationspilen i samma färg, om de ej är 1. Aktuella restriktionsintervall ( $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ , t.ex.) är också angivna här, vid den funktion vars restriktion det gäller.

2. Om  $f(x) \text{ --- } \mathcal{F}[f](x)$ , så  $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f](x)] \text{ --- } f(x)$  (symmetri).

3. Om  $f(x) = 0$  för alla  $x < 0$  (kausal) och  $\int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx < \infty$ , så gäller att  $\mathcal{L}[f](ix) = \mathcal{F}[f](x)$ .

4. Om  $f(x) \text{ --- } g(x)$  och  $g(x) \text{ --- } h(x)$ , så  $f(x) \text{ --- } h(x)$ .

5. Om  $f(x) \text{ --- } g(x)$  och  $g(x) \text{ --- } h(x)$ , så  $f(x) \text{ --- } h(x)$ .

I systemets högerkant finns andra samband som spelar stor roll, och som i hög grad bygger på funktionerna i familjerna. Om man summerar funktionerna i de Naturliga potenserna ger det geometriska serien, som har stor relevans i de mest skiftande sammanhang. Den summan är

funktionen  $\frac{1}{1-x}$  begränsat till intervallet  $-1 < x < 1$ . Den finns med till höger i denna rad, tillsammans med två funktioner med udda respektive jämnt antal termer. I dessa två andra funktioner kan man se hur summan hamnar nära  $\frac{1}{1-x}$ , dock inte alls för tal utanför intervallet  $(-1,1)$ .

Samband mellan summor av funktioner i familjerna 8 och 13, begränsade trigonometriska funktioner och impulsfunktioner, så kallade impulståg (uppbyggda nerifrån och upp respektive från vänster till höger), finns också noterade.

### **Sammanfattning**

Systemet täcker grundläggande analys och transformteori, som är viktig matematik för de flesta ingenjörsutbildningar. Att allt finns i en och samma affisch ger exklusiv möjlighet att jämföra och diskutera, särskilt om affischen finns i eller nära de salar där dessa kurser undervisas. I denna form blir geometrisk och algebraisk förståelse av samma fenomen i hög grad tillgängligt.

Denna text har bara skummat på ytan över alla samband som finns representerade i detta periodiska system – som spelar stor roll i matematisk analys. Och som man använder varje dag när man gör kalkyler med dessa funktioner.