Håkan Lennerstad

Metatrianglar – trianglar med ögon

Trianglar känner vi alla till. Vi får här en undersökning av trianglar ur ett ovanligt perspektiv. Håll ut genom beteckningarna så kommer nya, intressanta resultat.

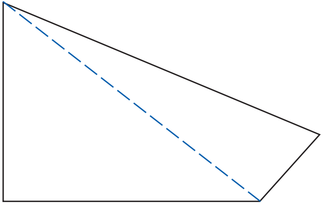
Matematiken lider stor brist på helhetsbilder. I en helhetsbild kan man se var olika kunskaper hör hemma i förhållande till varandra. Matematikens kultur är fixerad vid problemlösning till den grad att helhetsbilderna sällan blir synliga. Det gör matematiken atomistisk, fragmentarisk. Matematiken behöver också formulera helhetsbilder, eftersom människor, inte minst barn, gärna tänker så.

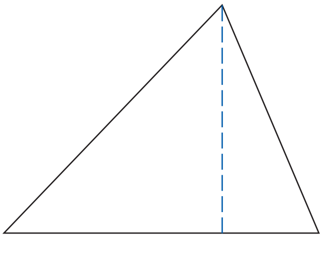
Låt oss därför tillåta oss att undersöka trianglar på ett lite friare sätt. Motivet att det är kul, stimulerande, intressant räcker. I efterhand kan man finna en ny förståelse för relationerna mellan ett begrepps egenskaper.

I denna artikel är alla trianglar som är likformiga samma triangel. Alltså, om man förstorar, roterar, spegelvänder eller flyttar den, så är det fortfarande samma triangel. Men inte om man ändrar en vinkel.

Rätvinkliga trianglar är grunden

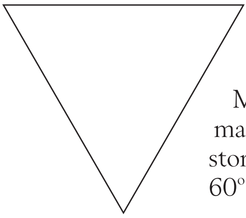
Den rätvinkliga triangeln är kanske geometrins allra viktigaste figur, tillsammans med cirkeln. Fyrhörningar och flerhörningar undersöks ofta genom att de delas in i trianglar. Trianglar som inte är rätvinkliga undersöks genom att man drar en höjd, som ger två rätvinkliga. Det ger två fall av Pythagoras sats. Så är sinus- och cosinus-satserna härledda. Men sen är det stopp: vi kan inte förenkla ytterligare. De rätvinkliga är grunden. Pythagoras sats, känd långt före Pythagoras, är fortfarande känd. Och fortfarande sann. Och fortfarande användbar. Och fortfarande viktig! Den används ständigt då man ska bestämma avståndet mellan två punkter i ett koordinatsystem, när man räknar med trigonometriska funktioner, och i abstrakta linjära rum. Det är inte många vetenskaper som har resultat som gäller så länge. Vetenskapers halveringstid brukar vara betydligt kortare.





Vinkelperspektiv

Men låt oss återvända till trianglarna. En triangel har tre vinklar (”tri angel”), låt oss kalla dem A, B och C, där A är den minsta, B är mellanvinkeln och C den största. Vi kan byta C mot 180 -A- B. Om vi gör det så bestäms varje triangel av A och B, enbart. Bara två tal, A och B.

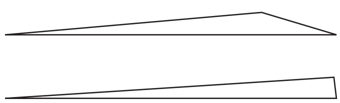


Hur stor kan den minsta vinkeln vara?

Den kan förstås inte vara mindre än 0 grader, här har vi en gräns nedåt. Men uppåt? Blir A för stor är den inte längre minst. Gränsen uppåt går när man krymper de två större vinklarna så mycket som möjligt, tills alla tre är lika stora. Den liksidiga triangeln gör därför den minsta vinkeln så stor den kan bli: 60°. Vi har $0 < A \leq 60^\circ$.

Hur stor kan mellanvinkeln vara?

Kan mellanvinkeln B vara nära 0? Ja, hur nära som helst. Det finns extrema trianglar där båda de minsta är nära noll, och den största då måste vara nära 180° – en mycket platt triangel.



Hur stor kan B vara, som störst? Den är som störst om den är lika stor som den största, och den minsta är nära 0. Då har vi en mycket smal triangel. Denna triangel är tvärt avhuggen, för både B och C är nära 90°. Alltså: $0 < B < 90^\circ$.

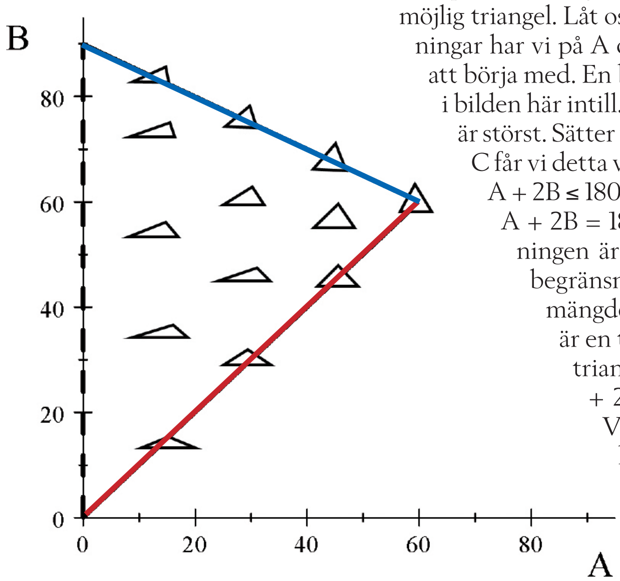
Hur stor/liten kan den största vinkeln vara?

Den största vinkeln C är som minst 60°, när alla tre är lika, och som högst 180°, när de andra två är nästan noll. Så $60^\circ \leq C < 180^\circ$.

Härnäst fortsätter vi att titta närmare på hur stora och små trianglarna i en vinkel kan vara. Men nu i par.

Den första metatriangeln: de två minsta A och B

Låt oss utgå från A och B och använda $C = 180 - A - B$. Här kommer det som är nytt. Kan vi rita upp en figur som innehåller alla tillåtna A och B, de två minsta vinklarna, med A på x-axeln och B på y-axeln? En figur som i så fall har en punkt för varje möjligt värde på A, B och C, alltså varje möjlig triangel. Låt oss se vad det skulle bli. Vilka begränsningar har vi på A och B? A är minst, så $A \leq B$ gäller, till att börja med. En begränsning är alltså linjen $A = B$, röd i bilden här intill. En annan begränsning är $B \leq C$, för C är störst. Sätter vi nu in $C = 180 - A - B$ i olikheten $B \leq C$ får vi detta villkor enbart i A och B. Lite kalkyl ger $A + 2B \leq 180$. Vi ska alltså vara på rätt sida av linjen $A + 2B = 180$, blå här intill. Den tredje begränsningen är $A > 0$, så linjen $A = 0$ är en tredje begränsning. Vi får tre räta linjer. Då borde mängden av alla möjliga vinklar A och B, som är en triangels två minsta vinklar, bilda... en triangel. Ritar vi ut linjerna $A = B$ och $A + 2B = 180$ så får vi triangeln här intill. Vi har fått en figur där varje triangel kan placeras ut i form av en punkt, 13 sådana är utsatta i figuren. Figuren av trianglar visar sig bli en triangel, som vi då kallar en metatriangel!



Nära origo på A = B är både A och B nära noll, så då måste C vara nära 180. Följer man linjen A = B uppåt ökar A och B, och C minskar. Slutpunkten har vi när A = B = C, då de är 60 alla tre. I denna punkt finns den liksidiga triangeln.

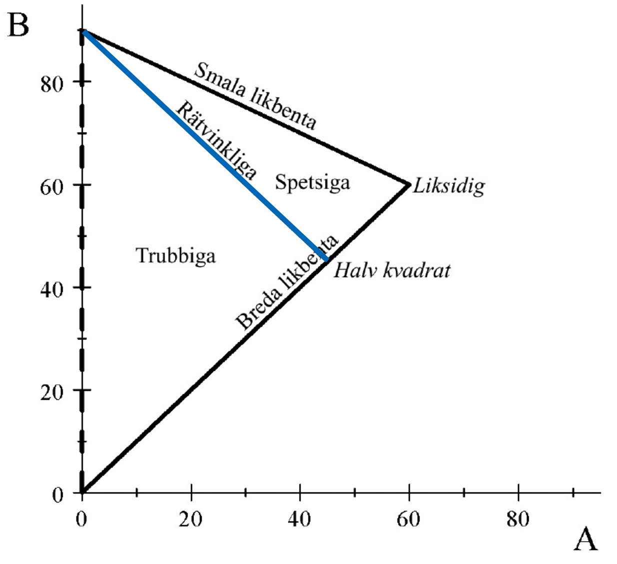
Vid det tredje, övre hörnet är A nära noll, och B = C. Då är både B och C nära 90. Följer vi denna kant nedåt ökar A, medan B = C minskar, tills vi därifrån når A = B = C = 60, den liksidiga triangeln.

På den streckade sidan är A = 0, så här har vi urartade trianglar. På den nedre kanten A = B har vi alltså likbenta trianglar där den tredje sidan är längre än de två som är lika. Vi kan kalla dem ”breda likbenta” trianglar. På den övre kanten är den tredje sidan kortare, här är de ”smala likbenta”.

En kort summering innan vi går vidare: Varje triangel motsvarar en punkt, och dessa punkter bildar en triangel, som vi kallar en metatriangel. Den begränsas av linjerna A = 0, A = B och A + 2B = 180.

Var är de rätvinkliga?

Om alla trianglar finns i denna metatriangel, var finns de rätvinkliga trianglarna? Jo, då är C = 90°, så C = 180 - A - B ger nu att A + B = 90. Detta är en annan rät linje uttryckt i variablerna A och B, som är markerad med blått i nästa figur:

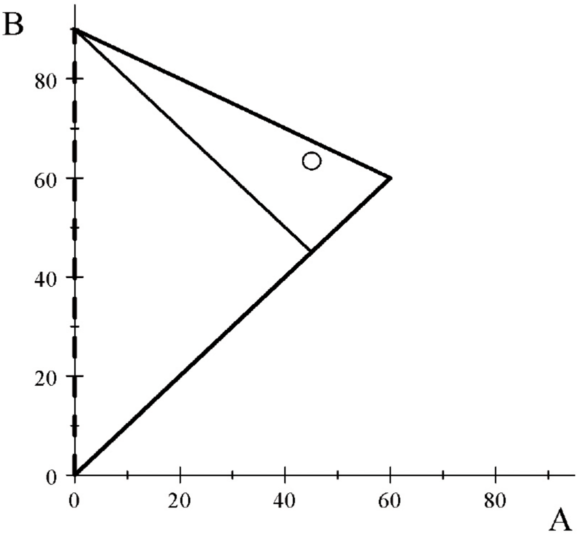


Det betyder att linjen av rätvinkliga trianglar bildar en höjd i metatriangeln. Vid höjdens fotpunkt har vi den halva kvadraten, för det är den enda triangel som är både likbent och rätvinklig.

Höjden delar metatriangeln i två rätvinkliga trianglar, så den delar trianglarna i två grupper. De som har en trubbig vinkel, de trubbvinkliga, är nedanför höjden. De som bara har spetsiga vinklar, de spetsvinkliga, är i den övre delen. Dit hör den liksidiga, som finns ute i hörnet. En rät vinkel är just gränsfallet mellan trubb- och spetsvinkliga. Den gränsen visar sig vara en höjd.

Metatriangelns öga

Eftersom även metatriangeln är en triangel finns den som en punkt någonstans i sig själv. Den punkten kan vi kalla ögat – en punkt som avspeglar helheten. Metatriangelns sidlängder är $30\sqrt{5}$, $60\sqrt{2}$ och 90, som kan förkortas till $\sqrt{5}$; $2\sqrt{2}$; 3 eller approximativt 2,34; 2,83; 3. Det betyder att metatriangeln inte är så långt från en liksidig triangel. Eftersom 2,83 och 3 är nära varandra, och 2,34 är klart mindre, hamnar ögat nära den övre sidan, där vi har de smala likbenta trianglarna. Se bilden nedan.



Fortsättning på nätet

Det finns två metatrianglar till, på Nämnaren på nätet finns mer om dem. Om vi istället för A och B utgår från A och C får vi en annan metatriangel. Denna triangel är trubbig, och de rätvinkliga är inte någon höjd. Om vi som avslutning utgår från de två största vinklarna B och C får vi den tredje metatriangeln. Inte heller här är de rätvinkliga en höjd, men å andra sidan är den tredje metatriangeln själv rätvinklig – med sidorna 1, 3, $\sqrt{10}$. Det betyder att den tredje metatriangelns öga ligger på linjen för de rätvinkliga trianglarna.

De tre metatrianglarna kan pusslas ihop till en stor triangel – trippeltriangeln. Alla tre möts i en enda punkt, som är den liksidiga triangelns punkt. Trippeltriangeln visar sig vara en halv kvadrat. Den halva kvadraten finns som punkt på två platser i trippeltriangeln, en i det inre och en på utkanten, så trippeltriangeln har två ögon. Ett inre och ett yttre.

LITTERATUR

Lennerstad, H. (2007). *Commensurable and Rational Triangles*, Research Report, Blekinge Institute of Technology, no 2007:07.

Tengstrand, A. (2005). *Åtta kapitel om geometri*, Lund: Studentlitteratur.