HÅKAN LENNERSTAD

MATEMATIK & mänsklighet

Matematik har en mycket humanistisk sida. Den är gjord av människor. Djupast sedd är matematiken ett kollektivt konstverk, slitstarkare och vackrare än de flesta. Ta chansen att lära känna det konstverket.

Foto: Pressens Bild.

β δ γ Ω α

Denna artikel diskuterar tre frågor om matematik:

1. *Den matematiska vetenskapen* – vad är matematisk teori?
2. *Matematiskan* – vilken roll spelar det matematiska språket för matematikens sanningar?
3. *Matematikverksamheten* – hur ser den ut? Vad händer när människor sysslar med matematik?

En bakomliggande idé i denna framställning är att en intressant beskrivning av matematik kräver beskrivning av vad matematiken innebär för matematikverksamma människor. Hur upplevs matematiken av de som sysslar med den? I denna artikel kommer jag därför inte att fördjupa mig i matematikens axiomsystem. Matematikens olika grenar beskrivs inte heller. Artikeln handlar om vad matematiken är och hur den fungerar för studenter, lärare och forskare i matematik, och från mänskliga, samhälleliga, vardagliga och praktiska synvinklar.

Del 1 Den matematiska vetenskapen

ÄR MATEMATIK SIFFERRÄKNING?

För de flesta är matematik sifferräkning. Om man ska dela upp restaurangnotan, beräkna sitt näringsintag vid en viss kost, jämföra olika ekonomiska placeringsalternativ, eller räkna ut hur mycket tapet som går åt vid omtapetsering av ett rum – då står man inför matematiska uppgifter.

Matematik är sifferräkning, ja, men detta är bara en mycket liten del och en startpunkt för matematiken. Matematik är framförallt matematisk teori, det är naturligtvis detta som matematikforskningen handlar om. Det finns idag enormt mycket matematisk teori. De grundkurser i matematik som undervisas på högskolenivå utvecklades på 1700- och 1800-talet. Teori har fortsatt att utvecklas sedan dess och utvecklas fortfarande, snabbare än någonsin. Ett flertal nya matematiska grenar har tillkommit under åren, och det har aldrig varit så många verksamma matematiker som idag. En professionell matematiker kan idag behärska endast en mycket liten del av dagens matematik. Det är dock möjligt att ha en viss överblick över ett betydligt större område.

Det är också uppenbart att allt i matematiken, varje formel, beteckning och resultat, har konstruerats eller svettats fram av enskilda matematiker någon gång i historien. Varje stycke matematik har sin speciella utvecklingshistoria, och har vid något tillfälle varit nydanande och obegripligt för samtiden.

MATEMATISK TEORI: FÖRUTSÄTTNING FÖR ALL TEKNIK

Det finns knappast någon teknik idag som inte använder matematisk teori på ett eller annat sätt, antingen i produkten själv eller i tillverkningsprocessen. Vid

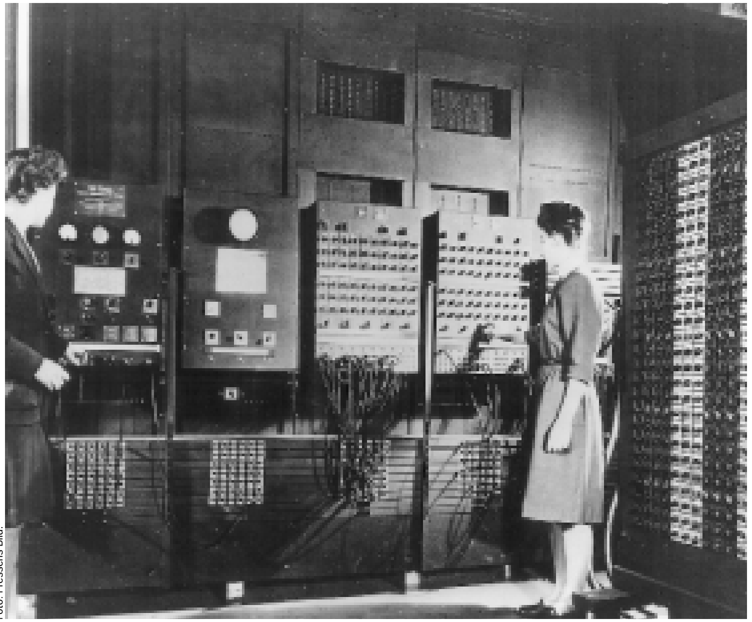


Foto: Pressens Bild.

ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Calculator) räknas ofta som den första elektroniska datorn. Den stod färdig 1946 och var avsedd för matematiska beräkningar av projektilbanor. Förkroppsligandet av matematiskt tänkande tog nu ett stort steg framåt från de mekaniska räknemaskinerna.

biltillverkning beräknar man temperaturer i förbränningsmotorn med s.k. partiella differentialekvationer. Tredimensionell datorgrafik använder geometriska projektionsformler från tre dimensioner till två – till dataskärmens plan. Stereoanläggningar behandlar frekvenser med s.k. Fourieranalys.

Att formulera numeriska samband med matematiskt formelspråk gör sambanden lätta att datorprogrammera. Matematiskt formelspråk och dataspråk är mycket nära varandra. Är det en tillfällighet? Nej, matematik fanns när datorerna skapades. Datorerna konstruerades som matematikmaskiner.

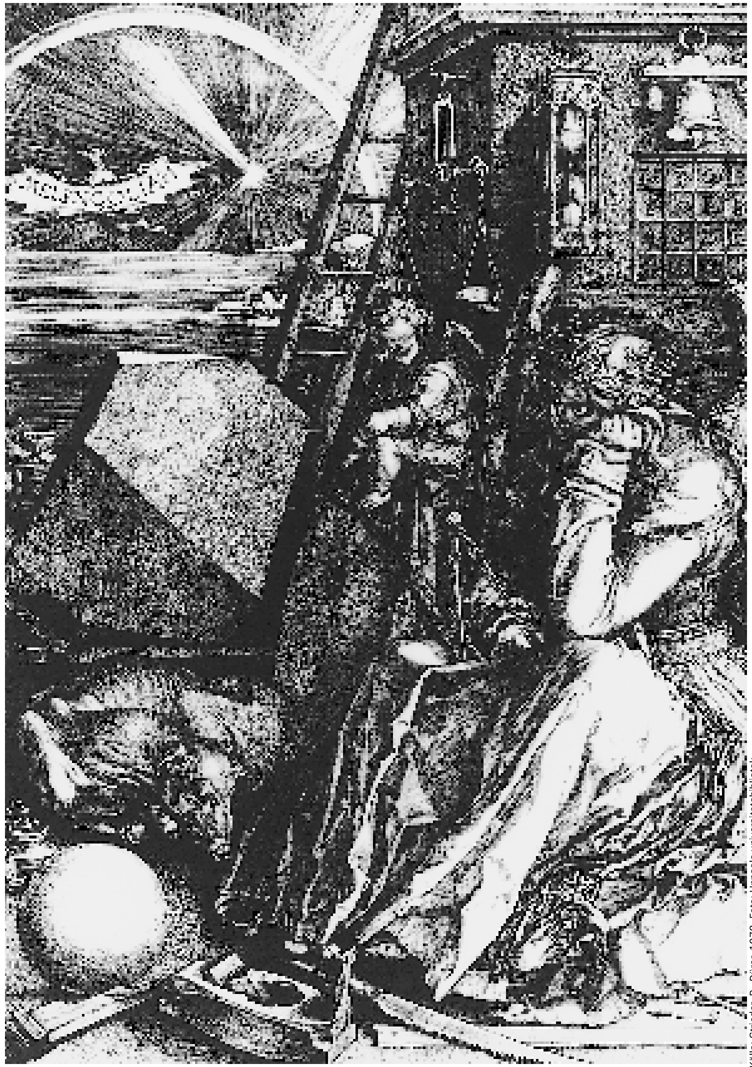
Idag matematiseras många vetenskaper och verksamheter. På Wall Street i New York använder man ofta matematiskt avancerade prognosverktyg, vilket gör att många matematiker anställs för att kunna använda dessa verktyg på ett bra sätt. Flera Nobelpris i ekonomi har varit i hög grad matematiska. De flesta av biologins viktigaste forskningsområden innehåller avancerad matematik. Matematiska metoder har idag också väsentliga tillämpningar inom psykologi och medicin. Matematiken spelar en central roll i den västerländska civilisationen, i synnerhet inom vetenskap och teknik.

STARTPUNKT FÖR TEORIN: RÄKNING UTAN SIFFROR

Vad är då matematisk teori? Ja, matematisk teori börjar med observationen att det går att räkna fast man inte vet vilka tal man räknar med. I matematik arbetar man med variabler och okända storheter. Om man vill räkna ut medelhastigheten när man kör bil från Karlskrona till Göteborg, så är det bara att mäta hur lång tid det tar och hur lång sträckan är. Dividera sträckan med tiden. Det just beskrivna var en kalkyl utan siffror – fast vi inte känner siffrorna så är det möjligt att tala om hur man kan räkna ut medelhastigheten. Vi får en formel, ett recept för hur man ska behandla siffrorna om dessa är kända. Matematiker ersätter oftast orden och uttrycken för de okända storheterna med bokstäver. I exemplet kan vi säga att x = medelhastigheten, y = sträckan och z = tiden. Då har vi sambandet $x = y/z$. Detta skrivsätt gör att formeln blir betydligt kortare, vilket är en mycket stor fördel för den matematiska tankens flykt. Men sambandet blir också genast mer abstrakt. Tillämpningen syns inte längre så tydligt, och det rent matematiska får ett eget liv.

ABSTRAKT = GENERELL

Låt oss ta ett enkelt exempel för att illustrera rubrikens ekvation. I de två ekvationerna ”5 äpplen + 2 äpplen = 7 äpplen” och ”5 + 2 = 7” är den första en ganska påtaglig ekvation. Man kan till och med placera verkliga äpplen i grupper på ett bord och räkna, för att kontrollera påståendet. Den andra ekvationen kan förstås gälla inte bara äpplen, utan även päron, hästar, galaxer, idéer, människor… den är mera generell. Och genast har vi enbart en relation mellan symboler, vi har något som är mera abstrakt. För generaliteten får vi betala i abstraktion. Ekvationen gäller betydligt fler praktiska situationer, men det faktum att man inte tydligt ser *en enda* gör att den ser mera verklighetsfrämmande ut. Ordet ”abstrakt” kommer från grekiskans ord för ”bortse från”. Här bortser vi från tillämpningen,



Källa: Strieder, P., Dürer, 1978. Foto: Uppsala universitetsbibliotek.

Matematiken betraktades under renässansen som all vetenskaps ursprung. Albrecht Dürers kopparstick ”Melencolia I” från 1514 innehåller mängder av matematiska symboler. Här finns passare, klot, romboeder – och uppe till höger en magisk kvadrat av ordningen fyra, dvs. fyra gånger fyra rutor.

och behåller bara det rent numeriska, det rent kvantitativa.

Det går å andra sidan att konkretisera abstrakt matematik just genom att ta fram tillämpningsfall och övertyga sig om att matematiken fungerar. När man sysslar med addition kan man välja att tänka på addition av äpplen. Det går att se användningar av vilket stycke elementär matematik som helst. Det är en fördel om sådana finns med i framställningen.

MATEMATIKEN HAR SPIRAT UR ALLA VETENSKAPER

Allt kvantitativt som dyker upp i olika sammanhang kan bli matematik – det kan man använda matematik till. De mänskliga kulturerna har tidigt observerat att räknandet i olika sammanhang ofta fungerar på samma sätt. Därmed kan man börja överlägga om hur räknandet fungerar, oberoende av vad som räknas. Detta var början på matematiken. Den uttrycker och sammanfattar räknandet som sådant, oberoende av ämne, och växer därför fram ur många ämnen. Typiskt för matematik är att talen inte har någon sort.

Man kan nämna tre skäl till att matematiken förefaller (eller är) oberoende av de övriga vetenskaperna:

1. Matematiken är formulerad som ett självständigt ämne, i sitt eget språk, om än matematikens termer från början ofta är lånade från tillämpningarna.
2. De flesta matematiker arbetar oberoende av tillämpningarna – det skulle vara alltför tidsödande att vara seriöst insatt i tillämpningarna också.
3. Matematiker hämtar alltid argument för sina resultat enbart från matematiken.

Matematiken har en hög grad av oberoende, men har ändå gemensamma grunder med de andra vetenskaperna, och växelverkar med dessa på olika sätt. Självständig matematikforskning finner då och då praktiska tillämpningar – nya begrepp, idéer och kalkylmetoder brukar då komma in i den aktuella tillämpningen. Likaså utgör andra vetenskaper inte sällan utgångspunkter och inspirationskällor för ny matematisk teori.

Matematikens sanningar bevisas med matematiska argument, men testas också av andra vetenskaper när dessa använder matematiken.

MATEMATIK: PARALLELLVÄRLD TILL VERKLIGHETEN

Matematikens grunder kommer från vanligt förekommande situationer i verkligheten. Därefter utvecklas all teori med hjälp av räkneregler som alla är självklara, trivialt sanna (vi återkommer till dessa). Matematiken utvecklas därigenom i en riktning som stämmer överens med verkligheten; som en parallellvärld till verkligheten. Det kan vara en förklaring till att det så ofta har hänt att helt abstrakt matematik funnit praktiska tillämpningar.

Matematik generaliseras emellertid ofta i riktningar som går utöver vår aktuella verklighetsuppfattning. I linjär algebra studerar man rum med dimension n, där n är vilket heltal som helst. Man kan tycka att $n = 3$ är det enda ”realistiska” fallet, eftersom vår verklighet är tredimensionell. Emellertid har de ”orealistiska” andra alternativen tillåtit teoretiska fysiker att prova andra möjligheter: vi har exempelvis Einsteins fyrdimensionella rumtid och moderna strängteorier som tycks kräva att tillvaron är 11-dimensionell. Det har hänt ett otal gånger i historien att skenbart abstrakt, absurd och orealistisk matematik har funnit verkliga situationer där den varit höggradigt användbar. För övrigt har n-dimensionella rum ett mycket stort antal andra tillämpningar utöver rymdgeometri.

Matematiken imiterar verkligheten. Men den kan också generaliseras utöver verkligheten, och ger då möjligheter för tanken att finna nya modeller, att förbättra eller revolutionera vår verklighetsuppfattning. Inte så få vetenskapsmän har funnit matematikens överensstämmelse med verkliga fenomen så överväldigande att de vänder på steken och beskriver verklighetens sanna natur som matematisk. Att förstå verkligheten är att förstå dess matematik. Det är en uppfattning som inte delas av undertecknad. Jag finner det rimligare att betrakta verkligheten som hur komplicerad som helst. Vi upptäcker med matematiken bara det vi kan se, med denna och på andra sätt. Det är fantastiskt att vi kunnat finna en hel del struktur.

MATEMATIKEN FRAMGÅNGSRIK PÅ GRUND AV ATT DEN ÄR OKOMPLICERAD?

Matematiken har mängder av tillämpningar, men håller ändå en viss distans till verkligheten. Einstein har sagt att ”I den mån matematiken är exakt är den oanvändbar, och i den mån den är användbar är den inte exakt.” Det är inte orättvist att säga att de matematiska resultatens pålitlighet beror på att de lever i en egen värld, som är avpassad för dessa, där vi kan ha visshet. Vi kan ha visshet på grund av att vi slipper klyftan mellan omvärlden och medvetandet. Denna klyfta behöver i matematiken inte överbryggas, varken med försök eller med kritiskt tänkande. Både det kritiska tänkandet och försöken behövs däremot i högsta grad i tankens egen värld. Det är betydligt svårare att *både* tolka sinnesintryck och mätinstrument på ett riktigt sätt, och konstruera en exakt teori. Alla trodde på Newtons mekaniska teori tills Einstein visade att den inte stämmer så bra för hastigheter nära ljusets. Det är tänkbart att vi i morgon finner försök där dagens fysik inte är korrekt. En teori för verkligheten är ett sammanfattande sätt att beskriva resultaten av alla hittills utförda kända försök. Det finns mängder av försök som inte är utförda. Säkert skulle en del av de ogjorda försöken ge överraskande resultat.

Avsaknaden av direkt koppling till verkligheten kan också ses som en orsak, av flera, till matematikens snabba tillväxt i alla möjliga riktningar.

I naturvetenskapen är det ofta möjligt att isolera ett litet antal objekt, studera dessa och vinna pålitlig kunskap om dessa objekt. Detta gör det i viss mån möjligt att bygga upp säker kunskap från små pålitliga ”fragment av kunskap”. Det hör till undantagen att detta är möjligt i samhällsvetenskaperna. Här har man sällan denna möjlighet att fragmentarisera – oftast påverkas allt av allt. Det är också på ett fundamentalt sätt lättare att göra exakta modeller av kulor eller vattenvågor i rörelse, än av människor eller samhällen. Samhällskunskap försöker beskriva oändligt mycket mera komplicerade fenomen än naturvetenskapen. Matematiken försöker ”bara” beskriva ”sina egna” fenomen, och kan därför nå full visshet.

LEK ELLER ALLVAR, ELLER BÅDA?

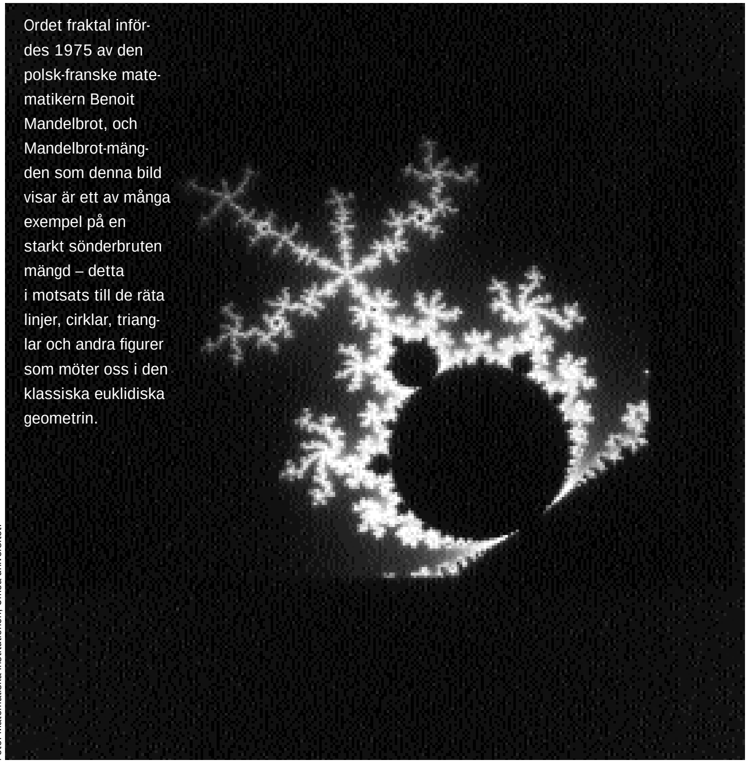
Som nämnts kan man nog säga att matematiken inte kommer så långt ifrån verkligheten ändå, tack och vare att grunderna för de två har mycket gemensamt. Detta gäller även om matematiken inte alls utvecklas med någon tillämpning i sikte. Det gäller även om den utvecklas för nöjes skull, eller för skönheten i teorin. Detta kan i någon mån jämföras med att många (de flesta?) uppfinningar har uppkommit ur oavsiktliga kombinationer och tillfälligheter, och fördomsfri observation av vad som faktiskt inträffade.

Ett exempel är de komplexa talen, som utvecklades av matematiker för att kunna skriva upp och tala om någon form av lösning på ekvationer av typ $x^2 = -1$. En elegant (≈kompakt, kortfattad, uttömmande, ”naturlig”) teori utvecklades, antagligen utan varje tanke på tillämpning. Idag är varje eltekniker välbekant med räkning med komplexa tal, de eltekniska kalkylerna vore mycket mera besvärliga utan komplexa tal. Ett annat exempel är knutteori – teori för vanliga och ovanliga knutar. Det var ren ”rekreationsmatematik” från början, men är idag en teori med flera viktiga tillämpningar. En sådan är DNA-teknik. Bland annat är vissa typer av knutar på DNA-molekylen tecken på förekomsten av vissa enzym.

MATEMATISK MODELLERING

Räknemässiga problem som dyker upp i tillämpade vetenskaper och tekniska sammanhang ställer två problem. Hur ska problemet skrivas upp, och hur ska problemet lösas? Det första steget brukar kallas matematisk modellering – att finna en effektiv matematisk formulering, en matematisk modell. Svaret på den andra frågan är en utmaning för de matematiska kunskaperna och för den matematiska kreativiteten. Det finns ett talesätt om praktiken och teorin: ”Det finns inget så praktiskt som en god teori!”.

Man kan förvånas över att samma matematik fungerar i så många olika tillämpade sammanhang. Men en sådan fråga handlar om vad vi väljer att upptäcka, var vi ser problem. Kanske vi ser struktur och lösbara problem bara i de fall som liknar de problem vi har löst tidigare. Genuint nya problem, som kräver framtidsmatematik, ser vi kanske överhuvud taget inte. Ett exempel som pekar i den riktningen är fraktalerna. En typisk fraktal kurva är veckad in i sin minsta finstruktur – en kustlinje är ett bra exempel. Om vi tittar på en kartbild på en kustlinje är den (oftast) veckad, och även om vi successivt förstorar så förblir den veckad, nya veck blir synliga. Detta gör det problematiskt att tala om en kustlinjes längd. Ty ju kortare mätsträcka vi använder, ju fler veck får vi med och ju större blir den uppmätta ”längden”. Man vet sen några år tillbaka att belastningskurvan för en internetserver har samma egenskap. Detta är kurvor med särskilda kvaliféer som vi knappast lade märke till tidigare. Utan begrepp är vi blinda.



Ordet fraktal infördes 1975 av den polsk-franske matematikern Benoit Mandelbrot, och Mandelbrot-mängden som denna bild visar är ett av många exempel på en starkt sönderbruten mängd – detta i motsats till de räta linjer, cirklar, trianglar och andra figurer som möter oss i den klassiska euklidiska geometrin.

Foto: Matematiska institutionen, Umeå universitet.

Teoretisk fysik är kanske den mest matematikintensiva vetenskapen utanför matematiken. Således är teoretiska fysiker matematiskt mycket välutbildade; det finns teoretiska fysiker som blir matematiker (och ibland tvärtom). Ändå kan man se en påtaglig skillnad i attityd till matematik mellan matematiker och teoretiska fysiker. Teoretiska fysiker bryr sig ofta inte om att bevisa sina formler och resultat, och använder inte sällan begrepp som inte är riktigt väldefinierade, en matematiker kan tycka att fysikerna misshandlar matematiken. För en matematiker är bevisen det viktigaste, samt att använda begrepp som har en helt klar matematisk betydelse. De teoretiska fysikerna är mest engagerade i matematisk modellering, något som matematiker sällan ägnar mer än ett förstrött intresse.

Fysikerna har en bild av en fysikalisk realitet, till vilken de vill forma och passa in en lämplig matematik. För dem är det sekundärt om matematiken inte riktigt fungerar som matematik, de hoppas att dessa matematiska bekymmer senare kan ordnas med lite lämplig ny teori. Den enda realitet som matematikerna är angelägna om att få att fungera på ett korrekt sätt är den matematiska.

ÄR METODER ATT VINNA KUNSKAP EN DEL AV ÄMNET?

Med ”matematik” brukar man mena den logiska strukturen av definitioner, satser och bevis. Det är det matematiska arbetets resultat. Detta är ett lite ovanligt sätt att beskriva ett vetenskapligt område. Vanligen brukar de metoder som används för att uppnå resultaten också anses som en del av området.

Med ”husbyggnad” menar man inte bara resultatet, de färdiga husen, utan även planerandet och konstruerandet. I ”kemi” inkluderas laborationsmetoderna, som inte är kemiska resultat men mycket viktiga medel att nå nya kunskaper och besvara frågor. Varför räknas inte matematikens metoder för att nå kunskaper, varför är matematiken dess resultatet och inget annat? Ja, kanske för att dessa metoder enbart är tänkande och tankeprocesser, det är enbart mentalt, det finns nästan inget synligt och konkret i detta. Matematikens metoder behöver faktiskt beskrivas och synliggöras. Här kan man spåra en orsak till problem för matematiken som skolämne, vi återkommer till detta i avsnittet om matematisk verksamhet.

100% KVALITATIVT TÄNKANDE – 100% KVANTITATIVT RESULTAT

En hel del matematisk teori formuleras mer generellt än gällande tal: den beskriver objekt med vissa räkneregler, och det är inte nödvändigt att ange vad objekten betyder. Ofta behandlar matematiken grupper av tal som helheter, och inte så mycket enskilda tal. Två av de kanske främsta exemplen på detta är funktioner och funktionsrum – de senare är mängder vars element är funktioner. Det betyder bland annat att dessa objekt inte behöver vara tal överhuvudtaget, även om ”tillämpningen” för tal oftast är den historiska utgångspunkten. Därmed har matematiken också överskridit sina ramar av vetenskap för räknande.

Som nämnts, så fort vi har variabler i stället för tal behöver vi inte längre syssla med sifferräkning. När vi tänker ut formler och samband tänker vi på okända kvantiteter, vilka i total avsaknad av kvantitativa kalkyler snarare är kvaliteter. Matematiskt tänkande är kvalitativt tänkande, som i många fall leder fram till en formel – ett helt kvantitativt resultat. Denna kan genast användas för exakta numeriska beräkningar. Detta förhållande kan tillskrivas formelspråkets exakthet. Ett särdrag för matematiken är att avståndet mellan kvalitativt och kvantitativt är mycket litet.

Dock bör tilläggas att de flesta formler kräver en del numerisk analys i samband med datorprogrammeringen för att bli effektiva. En matematisk formel är oftast direkt programmerbar, men kan oftast skrivas på ett annat sätt för att vara maximalt effektiv ur datorberäkningssynpunkt.

GEOMETRI: FÖNSTER MOT PLATONS IDÉVÄRLD

Geometri spelar en speciell roll i matematiken. I även de mest abstrakta grenar av matematik kan man göra geometriska figurer av olika slag, vilka kan göra det abstrakta nästan konkret, de kan ge en nästan ”fysikalisk” känsla om vad som försiggår. Slående figurer kan få den formella kalkylen att framstå som ”bara” en alternativ beskrivning av de geometriska storheterna, som ”samma sak” som dessa. Emellertid tillmäts figurer inte bevisvärde. I formelspråket har vi mycket bättre kontroll över vad som händer, man kan lita på resultaten bättre. Figurer kan innehålla tankemässiga fällor: bara om ett resultat är formellt bevisat vet vi att en motsvarande figur är att lita på. I figurer kan enkla fall demonstreras, de är lämpliga för att illustrera grundbegreppen. Formlerna klarar enkla *och* komplicerade fall. Att geometrin spelar en så stor roll säger säkert en hel del om hur människan uppfattar och begriper saker och ting. En sak i den riktningen är att figurer aktiverar den högra bildseende hjärnhalvan. Figurerna är som titthål in i Platons idévärld, matematiska avdelningen.

VAR OCH HUR FINNS MATEMATIKEN?

Det finns två huvudlinjer i uppfattningen om vad matematik är: den platonska och den formalistiska. Den platonska hävdar att matematiken finns oberoende av människan. Psykologiskt upplever man något åt det hållet i matematikforskningen, de matematiska sanningarna tycks ha en aldrig svikande ”pålitlighet” som liknar objektiv existens. Den formalistiska menar att matematiken är ett sorts spel, som följer vissa logiska regler, och att dess existens är starkt beroende av människans, den finns väsentligen i människornas medvetande. Varje matematiskt påstående är onekligen ett ”om… så…”, det finns alltid något antagande för varje påstående. Åtminstone av detta skäl förefaller existensen av matematiska begrepp ha en svagare valör än existensen av blåsippor, moln och grustag.

Korrektare är antagligen att säga att matematiken finns i den mänskliga kulturen. De flesta vanor, åsikter, uppfattningar och annat som vi tar för självklart är ju delar av den kultur vi växt upp i. I en annan kultur är det annat som är självklart. Som en del av kulturen är matematiken oberoende av varje människa, men inte oberoende av mänskligheten.

Istället för matematiken som en del av tillvaron oberoende av människan kan man beskriva matematiken som typiskt mänsklig av det skälet att alla människor tycks hålla med om den. Detta finner undertecknad som en rimligare ståndpunkt. Matematiken är något gemensamt för människorna. Hur eventuella intelligenta icke-människor ser på matematiken vet vi inte. Det är möjligt att dessa skulle finna de största svårigheterna i att förstå vårt sätt att skriva och notera matematik, och aldrig nå fram till prövandet av sanningarna. Det finns både hällristningar och texter på utdöda språk som dagens forskning inte lyckats tolka. Detta är svårtolkade meddelanden som är producerade av individer som tillhör en annan kultur, men samma biologi och till och med samma art! Sådana svårigheter är för övrigt besläktade med svårigheterna att göra effektiva översättningsprogram.

ÄR INNEHÅLLET MER ÄN MÄNSKLIGT?

Sannolikt är vårt sätt att skriva matematik mycket speciellt: starkt historiskt och biologiskt betingat. Vårt sätt att skriva är ändå inte godtyckligt, det är en sorts avbildning av vårt sätt att tänka.

Förespråkarna för att matematiken är oberoende av människan har ändå ett argument kvar med en hel del tyngd: det är vårt sätt att skriva och beskriva matematikens sanningar som är typiskt mänskligt, men matematikens *innehåll* är mer än mänskligt. Det förefaller nödvändigt att gå utanför vad som är mänskligt för att besvara den frågan, vilket förstås i princip är omöjligt för människor. Man kan dock säga att vetenskapen i viss mån innebär utvidgningar av sådant slag. Vi kan se hur enskilda molekyler ser ut, trots att deras storlek ligger långt bortom vår syns upplösningsförmåga. Vi känner till radiovågor fast (vad vi vet) inget mänskligt sinne är känsligt för radiovågor. Vår tankeförmåga har ibland beskrivits som ett extra sinne. Och kanske insikt av vad som är kvalitativt utanför det mänskligt uppfattbara och tänkbara kan bli tillgängligt för oss om vi får kontakt med och kan kommunicera med intelligenta icke-människor.

Det finns förstås ingen skarp gräns för det mänskligt uppfattbara. Vi kan inte säga vad eller hur mycket som finns på andra sidan om denna gräns, liksom vi inte kan säga något om vad som finns ”utanför universum”. Gränserna för spekulation ligger längre bort, den är begränsad till det s.k. diskursuniversum: vad man kan tala om. Spekulation producerar gärna nya idéer som kan liknas vid idé-mutationer. De flesta dör genast. Några blir ny vetenskap.

Man kan säga att matematiken är mänsklig – något alla *människor* kan hålla med om. Dess vetenskaplighet kräver att den är opersonlig – något *alla* människor kan hålla med om. Dessutom, att tillägna sig matematik handlar faktiskt om personliga ställningstaganden. Det är något, förmodligen, som alla människor kan *hålla med* om.

Del 2 Matematiskan

FORMELLA KALKYLER: GENVÄGAR TILL KUNSKAP

Konsekvent användande av bokstäver eller symboler i stället för ord och uttryck i kvantitativa relationer är startpunkten för ett formelspråk. Självklara operationer formuleras som räkneregler, och kan därefter användas mer eller mindre automatiskt och omgående utan närmare eftertanke på innehållet. Sanningen är inbyggd. Om vi har två kulpåsar och det är lika många kulor i båda påsarna, och vi lägger till lika många kulor i båda, så är det självklart fortfarande lika många kulor i de båda påsarna. Som matematisk räkneregel skrivs detta $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ (a och b betyder då antalet kulor i respektive påse, och c är antalet som läggs till). Detta är ett av axiomen för de hela talen. Nästan alla axiom är dylika ”självklara” regler, vilka i matematiken inte bevisas utan i stället spelar rollen av utgångspunkter, grundläggande antaganden.

När räkneregler är formulerade kan dessa användas utan grubbel över formlernas innebörd, det är inte nödvändigt att tolka varje nytt samband i en kalkyl för att avgöra om det är sant. Valet av axiom och strikt bevisande av satser ger möjlighet till ett snabbt, formellt och ändå korrekt räknande, även om meningen för tillfället är osynlig. Eftersom vi alla är mänskliga och kan räkna fel rekommenderas ändå överslagsberäkningar och rimlighetsbedömningar då och då.

Genom att mer eller mindre mekaniskt använda räknereglerna i riktning mot ett visst mål inträffar det därför inte sällan att en matematiker når fram till överraskande och intressanta resultat som denne inte (omedelbart) vet vad de betyder. Innebörden och förståelsen kan komma senare. Sådana resultat kan ge upphov till nya tolkningar, nya möjligheter, nya begrepp. Matematiska kalkyler kan därför beskrivas som genvägar till kunskap: det är möjligt att finna sanningar innan dess betydelse är förstådd eller ens anad.

Det är nästan som att titta i verklighetens facit. I astronomi har man mer än en gång upptäckt egendomligheter i den astronomiska matematiken, och därefter kunnat observera nya tidigare

Källa: Mankiewicz, R., *Matematiken genom tiderna*. Foto: Uppsala universitetsbibliotek.

Problemet med den brutna bambun, från en kinesisk handskrift 1261. Den uppkomna rätvinkliga triangeln i bilden användes bland annat för en mängd olika problem som gällde Pythagoras sats.

okända fenomen i verkligheten. De svarta hålen är ett sådant exempel. Det bör sägas att det också finns fall där man inte har funnit motsvarigheter i verkligheten. Den matematiska modellens överensstämmelse med observerad verklighet är mycket långtgående vad gäller fysik och astronomi, men den är ändå inte 100-procentig.

SPRÅK KONTRA INNEHÅLL

Matematik har två komponenter: ett språk och ett innehåll. Vi kallar här den språkliga komponenten för matematiska (eng.: mathematish).

Låt oss ta ett mycket enkelt exempel för att jämföra matematiska och svenska. På svenska är ”Det är fullmåne idag.” en grammattiskt riktig mening, men inte ”Fullmåne idag är.”. På matematiska är ”1 + 1 = 3” grammattiskt korrekt, men inte ”1 + =1 3=”, den senare är en meningslös rad symboler. Man kanske kan gissa betydelser, som man kan gissa betydelser för uttrycket ”Fullmåne idag är.”. Sådant gissande handlar om att försöka finna en språkligt korrekt motsvarighet.

Vi har nu uppehållit oss vid den språkliga, grammattiska komponenten. Men hur är det med sanningshalten, med innehållet? Ja, i en svenskakurs är vi alldeles ointresserade av om det verkligen är fullmåne idag, eller inte. I matematik är vi däremot i högsta grad intresserade av vad som är sant och vad som är falskt. Både ”1 + 1 = 3” och ”1 + 1 = 2” är grammattiskt korrekta, men det första är falskt och det andra är sant. I matematik måste vi formulera korrekta påståenden, därefter vill vi ta ställning till om de är sanna eller falska.

Språkvetenskap handlar om ett språks användning och utveckling, och man är normalt inte intresserad av sanningshalten av påståenden i språket. Språkvetenskapliga studier om det matematiska språkets struktur, förändring med tiden och lokala dialekter finns ännu inte, så vitt undertecknad känner till. Detta är två stora skillnader mellan matematiska och naturliga språk.

MATEMATISKAN: ETT SKRIFTSPRÅK MED OUTTALAD GRAMMATIK

Skrivtecknen i kinesiska avbildar begrepp, medan skriften i europeiska språk avbildar ljud och uttal. I detta avseende har matematiskans struktur mer släktskap med kinesiska än med europeiska språk. Uttalets förändring leder i Europa, men inte i Kina, till upprepade stavningsreformer. I likhet med kinesiska uttalas matematiskan mycket olika i olika delar av världen, men skrivs på samma sätt.

Matematiskan har en högst speciell och väl definierad grammatik. Denna är dessvärre nästan inte alls formulerad i matematikkurserna. Man lär sig det matematiska språket på liknande sätt som barn lär sig modersmålet, utan grammatik och genom många exempel. Det har sagts att "Matematik lär man sig inte, man vänjer sig vid det." Detta syftar nog en hel del på det ganska långsamma upptäckandet av språkets egenheter, och språkets därmed långsamt ökande genomskinlighet in till världen av matematiska idéer. En del människor tar till sig språkets struktur spontant, på ett intuitivt sätt. Många av matematikerna hör nog till denna grupp, även om det också finns geniala matematiker som har stora problem med matematiskan. Matematikerna *använder* vanligen språket mycket mer än de funderar över det. I så fall är det kanske svårt att förklara matematiskan för studenter som inte förstår språket lika intuitivt.

Låt oss ta två exempel på matematiska språkligheter. Det första är matematikens användning av vanliga runda parenteser. De används i två syften i matematik: den första är för att ange ordningen för olika operationer. I uttrycket $x(y + z)$ ska y och z adderas innan x ska multipliceras. Den andra användningen är att beteckna en funktion: $f(x)$, funktionens argument står inom parentes. I den första användningen av parenteser kan man multiplicera in, men absolut inte i den andra. Så: $x(y + z) = xy + xz$ är korrekt, men $f(x)y = f(xy)$ är ett grovt fel. Studenter gör ibland sådana fel, till matematiklärarens förtvivlan. Distinktionen brukar inte formuleras.

VAD BETYDER ORDET "LÖSNING"?

Det andra exemplet gäller ordet "lösning". Detta vanliga och viktiga ord har penibelt nog två ganska olika betydelser i matematik (förutom dess betydelse i kemi: ungefär "blandning"). Vi kan säga att "ekvationen har lösningen "$x = -2$". Vi skriver också på våra tentamina att "Tydliga och fullständiga lösningar erfordras." Här använder vi "lösning" i två olika betydelser: som "svaret", alternativt som "kalkylen och resonemanget som leder till svaret". Detta är olyckligt eftersom det ofta finns flera helt olika kalkyler som leder till svaret, medan svaret givetvis alltid är detsamma oberoende av kalkyl.

De två nämnda språkligheterna påpekas inte i våra läroböcker. Långt ifrån alla matematiker har observerat dessa tvetydigheter. Vanligen behärskas *språket* på ett ganska intuitivt sätt, och *innehållet* på ett medvetet och mycket mindre intuitivt sätt. Språket är bara ett verktyg, det är ju det matematiska innehållet som är studieobjektet.

MATEMATISKA – DET MEST UTBREDDA INTERNATIONELLA SPRÅKET

Matematikspråket är ett sant internationellt språk. De matematiska formlerna som en kines, chilenare, portugis, ryss eller svensk skriver och använder ser likadana ut. En vietnamesisk matematiker kan direkt bygga vidare på en turkisk matematikers resultat. Kulturskillnader innebär inga barriärer. Matematiska artiklar skrivs inte enbart med matematiska formler, men utfyllnaden däremellan är oftast mycket enkelt naturligt språk. Det är inte så svårt att lära sig ryska tillräckligt för att läsa ryska matematikartiklar, i alla fall de mest matematiska delarna.

Matematiskan är också ett gemensamt språk för olika vetenskapsgrenar. En biolog och en fysiker som använder samma matematik använder samma matematikvokabulär, vilket underlättar tvärvetenskaplig kommunikation. Matematikspråket använder latinska och grekiska bokstäver samt ett antal specialtecken, om man räknar stora och små bokstäver som olika så består nog det matematiska alfabetet av ca 100 tecken.

Matematikens språk är så formaliserat att det inte finns utrymme för olika tolkningar. Matematiker som är oense blir på kort tid överens om vad som är sant och falskt – det har nästan inte alls bildats olika konkurrerande skolor i matematik. Det går att komma ner till botten, till verkligen enkla grunder, och bli överens. Här kommer matematikens "enkelhet" in. Ord på ett naturligt språk är i princip bottenlösa. Matematiken lever i sin egen värd, där axiomen utgör en faktisk botten.

Eftersom formelspråket är så väldefinierat kan man bygga mycket långt med matematiska konstruktioner och ändå behålla ett sanningsvärde. Detta är abstrakt matematik.

MATEMATIK ÄR OMSKRIVNINGARNAS KONST

Låt oss titta på ett mycket enkelt exempel på ett matematiskt resonemang – ett exempel där vi gör formella omskrivningar för att nå större enkelhet eller tydlighet i något avseende. Vi vill lösa $x^2 - 4x - 21 = 0$. Dvs., vi vill finna alla tal x som satisfierar ekvationen. Då kan vi skriva om den (med en metod som kallas kvadratkomplettering) till $(x - 2)^2 = 25$. Från denna senare ekvation får vi $x - 2 = 5$ eller $x - 2 = -5$. Ty: $(-5) \cdot (-5) = 25 = 5 \cdot 5$. Alltså, "$x = 7$ eller $x = -3$" vilket också kan skrivas som "$(x - 7)(x + 3) = 0$". Således innehåller "$(x - 7)(x + 3) = 0$" och "$x^2 - 4x - 21 = 0$" samma information. De två uttrycken är precis samma uttryck logiskt sett, om än inte formellt – de ser uppenbarligen inte exakt likadana ut. Men är det ena sant så är det andra också sant.

Man kan fråga sig: varför ska man göra omskrivningar om innehållet hela tiden är detsamma? Enda fördelen med detta senare sätt att skriva ekvationen som $x^2 - 4x - 21 = 0$ jämfört med som $(x - 7)(x + 3) = 0$ är att vi här lättare ser vilka x som är lösningar. Vi har med omskrivningar bytt en uttryck mot ett annat som innehåller exakt samma matematiska information, men där det är psykologiskt lättare att se att 7 och –3 är lösningarna. Omskrivningen har lyckats.

Matematiska resonemang är ofta omskrivningar enligt logikens regler från en form till en annan. Om inte målet för omskrivningarna är klart så verkar kalkylerna kanske svåra men framförallt meningslösa – det är ju samma logiska innehåll hela tiden! Det finns alltid myriader av olika sätt att göra omskrivningar, varav de flesta är poänglösa. Omskrivningarnas mål är inte alltid är så lätta att se förrän efteråt, vilket är ett problem för matematikens tillgänglighet och begriplighet. Här finns också den antagligen största svårigheten för området "Automated theorem proving", där man försöker bygga datorprogram som konstruerar bevis. Det är svårt att beskriva målet för omskrivningarna på ett sätt som är verkningsfullt för ett datorprogram. Intuition är svår att formalisera. Samma matematiska påstående kan ofta skrivas på flera olika sätt. Detta är alltså fundamentalt för matematiken. Utan omskrivningar, inga bevis.

MATEMATIKENS BESTÅNDSDELAR: DEFINITIONER, SATSER OCH BEVIS

Matematikens formella struktur består av endast tre komponenter: definitioner, satser och bevis. De är matematikens byggstenar. Axiom är en sorts definition, termen brukar användas för de ursprungligaste definitionerna, de som inte hänvisar till andra definitioner. Man talar också om lemmor, de är vanligen satser av lite mindre betydelse, eller påståenden som är viktiga steg för att bevisa en sats. Både satser och lemmor är matematiska påståenden som är särskilt viktiga jämfört med andra påståenden. Satserna är ofta de resultat som används utanför det specifika området. Det är alltså egentligen ganska mycket en fråga om tycka och smak och tradition vad som är så viktigt att det bör utnämnas till en sats.

De tre byggstenarnas roller är:

1. Definitionerna talar om vad begreppen betyder på matematiska, oftast i termer av tidigare begrepp.
2. Satserna talar om hur begrepp hänger ihop: om vi antar något (förutsättning), så vet vi också något annat (slutsats).
3. Bevisen är argumentationer som lämnar utom allt tvivel att satserna är sanna. I bevisen använder man ofta definitionerna baklänges – man går ofta tillbaka till tidigare definitioner och arbetar med dessa.

Det som har sagts hittills i detta avsnitt bör tas med viss skepsis, det är en traditionell matematik beskrivning. I själva verket kan denna formella struktur knappast dechiffreras utan den förklarande texten mellan definitioner, satser och bevis samt utan matematisk forskarutbildning vilket därmed också oundvikligen är en del av matematiken. Matematikern förbiser lätt sin *tolkning* av strukturen, sin förmåga till meningsfull och framgångsrik tolkning. Matematik är ett snabbt växande kulturarv.

Det är inte heller så att axiomen aldrig bygger på andra definitioner. Som ett exempel kan vi nämna att axiomen för de hela talen bygger på funktionsbegreppet. Exempelvis är addition en funktion $a(x,y)$ av två variabler så att $a(2,5) = 7$ och $a(50, 2) = 52$, osv. Definitionen av funktion är primitivare.

Kurt Gödel presenterade 1931 sitt bevis att det måste finnas satser i matematiken som är sanna men inte kan bevisas. Sådana satser har alltså inga motexempel, men kan inte bevisas med deduktion. Matematiksamfundet togs på sängen. Man hade, lite naivt kan man säga i efterhand, trott att allt som är sant ska kunna bevisas med logisk slutledning. Dock tycks Gödels sats inte få särskilt mycket praktisk betydelse. Som nämnts testas matematikens sanningar också i efterhand av andra vetenskaper eller teknikområden, de som använder dess resultat.

BEGREPP BLIR DEFINITIONER

Definitioner kan utformas på många sätt. Syftet med definitioner är att fånga in begrepp i matematikens formella språk. Det kan också vara att göra kalkyler enklare genom att införa praktiska storheter. Storheter som är praktiska i räknandet används gärna, och kanske så småningom samlar ihop till hederstiteln "grundbegrepp". Det finns ofta flera definitioner för ungefär samma begrepp, ibland går det att visa att de är ekvivalenta (logiskt likvärdiga). Ibland har olika definitioner olika fördelar och nackdelar, man växlar mellan dem, och det är nödvändigt att hålla reda på vilken definition som används.

Några exempel på begrepp eller idéer är funktion, derivata, ortogonalitet, yta, area, triangel, längd, vinkel, gränsvärde. Dessa begrepp betyder konkreta realiteter i ekonomi, fysik, biologi, kemi och andra vetenskaper. Definitionerna utformas på ett sätt som är praktiskt med hänsyn till det matematiska språket. För i matematiken är det definitionerna, idéernas *språkliga formuleringar*, som är arbetsmaterialet.

Man kan ofta tolka definitioner och satser i termer av underliggande idéer. Det är vanligt att det finns ett stort antal helt olika tolkningar, svarande mot olika vetenskapsområden eller tekniska sammanhang. Matematiken själv beskriver bara kvantitativa och logiska samband mellan storheter, allt annat är tolkningar.

Möjligheten att välja definitioner på olika sätt är kanske en förklaring till att uttrycket ”någon mening” är vanligt bland matematiker. Man kan höra att ”De här skorna är billiga, i någon mening.” Det betyder ungefär att det går att göra en rimlig definition av ”billig”, kanske inräknat hållbarhet och inköpspris och kanske något mer, så att skorna i denna definition bokstavligt talat är billiga.

MATEMATIK – ETT MENTALT MEKANO

En färdig matematisk formel kan användas även av icke-matematiker. Den kan jämföras med en automat, säg en chokladautomat. Automaten har konstruerats av ingenjörer, men även icke-ingenjörer kan köpa choklad med den. Tag som formelexempel den enkla formeln för bensinförbrukning i liter räknat: $b = s*m$, där s är körd sträcka och m är bilens bensinförbrukning per mil. Genom att stoppa in rätt mängd mynt i chokladautomaten får man en önskad chokladbit. Genom att stoppa in rätt siffror i formeln får man förväntad bensinförbrukning. Formeln liksom chokladautomaten kan användas även av icke-specialister.

I båda fallen finns vissa förutsättningar som krävs för att automaten ska fungera. I våra exempel måste man i chokladautomaten kanske använda svenska kronor, och för att få medelhastigheten måste vi mäta sträckan i mil. Det kan vara möjligt att förbättra automaten till att exempelvis tillåta inköp av glass, i vilket fall en frysdel måste byggas in. Då får man kalla på ingenjören. Även formeln kan byggas ut, exempelvis genom att ta med medelhastigheten: bensinförbrukningen per kilometer ökar med hastigheten. Man kan också ta med hur många stopp som sker på vägen, det svarar mot andelen stadskörning respektive landsvägskörning. Med dylika utbyggnader ger formeln bättre resultat. För att lyckas med detta behöver man kanske kalla på matematikern.

Den matematiska formeln kan användas på fel sätt, och (då) ge dåliga eller felaktiga resultat. Men en skillnad från chokladautomaten är att den inte kan gå sönder. Den är tydligen gjord i mera robust material. Matematiska formler kan realiseras av datorer eller miniräknare. Dessa kan givetvis kan upphöra att fungera, men det betyder inte att det är något fel på formeln.

De matematiska formlernas beståndsdelar är funktioner och andra uttryck. Matematikens verktyg är omskrivningsregler, som konjugeringsregeln, Pythagoras sats, partialbråksuppdelning, logaritmlagarna, derivering av produkt… Den matematiska verkstaden innehåller mängder av verktyg. Inte sällan måste man tillverka egna specialverktyg för sina bevis. Med hjälp av dessa verktyg kan vi skriva om våra formler till en viss form, som vi av något annat skäl väldigt gärna vill ha.

Matematiken liknar på det hela taget ett sorts mentalt maskineri. Det formella språket har mycket bestämda och väldefinierade regler, vilka kan sättas samman på diverse olika sätt, ungefär som legoklossar eller som delar i Mekano. I matematik kan man själv utan större svårighet tillverka nya typer av bitar. Det finns också obegränsat antal av varje beståndsdel, till skillnad från vad som gäller i en Mekanolåda. Både i Mekano och i matematik är det ett ganska litet antal sammansättningar av de möjliga som är intressanta.

PATENT FORMULERAR OCKSÅ IDÉER

Patent beskriver liksom matematik ickematriella storheter – området heter ju immatrialrätt. Man kan säga att man i patentansökningar försöker definiera och muta in områden i det tidigare nämnda diskursuniversum. Till detta är man hänvisad till naturligt språk med dess otydlighet. Det vimlar också av tvister och patentprocesser.

ATT KARTLÄGGA MATEMATIKENS ANATOMI

De logiska sammanhangen i en matematisk teori (eller i ett bevis) är i allmänhet labyrintartade, de hänger ihop kors och tvärs, utan att för den skull ge upphov till cirkelbevis. Detta är matematikens anatomi (eller matematikens geografi, om vi håller oss till landskaps-metaforen). Resonemanget i ett matematiskt bevis är ganska sällan som en linje utan förgreningar. Men matematikböcker är alltid skrivna linjärt, ett argument behandlas i taget. Matematikböcker kan sägas motsvara nedskrivna föreläsningar, vilka är linjära eftersom tiden är linjär. Det är emellertid möjligt, med hjälp av en logisk graf, att låta läsaren själv välja i vilken tidsordning argumenten studeras, genom att helt enkelt visa en karta över det labyrintartade matematiska landskapet. Man kan säga att i en traditionell matematikbok får läsaren en guidad tur genom landskapet istället för hela kartan.

Matematikövningar i Solna centrum. En besökare och en matematikprofessor försöker med gemensamma krafter och med träkuber ta sig an Fermats sats, som bevisades av Andrew Wiles.

Foto: Sam Stadener/Pressens Bild.

MATEMATIKEN ÄR ETT SVÅRÖVERBLICKBART LANDSKAP

Att bevisa något som hittills är obevisat betyder att hitta en kedja av omskrivningar som når fram till målet, så att varje steg i kedjan är oantastligt. Detta kan mycket väl beskrivas som en (mental) bergsbestigning. Kan vi finna någon väg upp till den högsta toppen? Vilken väg ska vi försöka ta? I början brukar alla tänkbara vägar se oframkomliga ut. En väg är för brant, en annan för isig, en tredje ligger under ständig hård vind. I matematiken, liksom vid bergsklättring, visar det sig ofta att någon sorts kombination av de olika vägarna leder till målet.

Matematik är ett svåröverblickbart landskap, dock varierar överblickbarheten mycket mellan olika matematiska grenar. Problem som är snarlika kan vara av mycket olika svårighetsgrad. Betrakta de två problemen ”Finns det något heltal n minst 3 så att $a^n = 2b^n$ har någon lösning med positiva heltal a och b?”, och ”Finns det något heltal n minst 3 så att $a^n = b^n + c^n$ har någon lösning med positiva heltal a, b och c?”. Båda har svaret nej. Det första kan bevisas på ett par rader, medan det högra har trotsat matematikernas ansträngningar i över 350 år. Det är Fermats stora sats, som bevisades av Andrew Wiles 1995. Detta bevis är långt och kräver en hel del avancerad teori.

De båda problemen är formellt, i betydelsen formuleringsmässigt, inte så långt ifrån varandra. En liten ändring av ett problem kan innebära en stor ändring av dess svårighetsgrad. Det matematiska landskapet innehåller många överraskningar.

Det har hänt flera gånger under matematikens utveckling att nya samband mellan skenbart orelaterade begrepp har upptäckts. Man har också då och då funnit formalism varmed flera matematiska områden kan beskrivas, de olika områdena utgör då specialfall. Detta har skapat nya höjdpunkter varifrån det är möjligt att överblicka ett stort område i matematiken. Konstruktion av bevis kan beskrivas som försök att skapa en väg från en plats i matematiken till en annan. Man råkar då inte sällan in i svårforcerade områden. De framkomliga vägarna är ofta oväntade, de innebär kanske kringgående manövrer. Framgångsvägarna är ofta kombinationer av olika delar av misslyckade försök. Matematikstudier och -forskning är orientering i en högst varierande mental terräng.

Del 3 Den matematiska verksamheten

DEFINITIONERNA UPPFINNS, SATSERNA UPPTÄCKS

Man kan fråga sig: vad i matematiken kan en matematiker påverka? Det är givetvis möjligt för en matematiker att välja förutsättningar och att välja definition – detta innebär att välja problem. Vid dessa val är matematikern en sorts ”designer” av teori. Det är givetvis också möjligt att välja namn och beteckningssätt, detta påverkar inte alls det matematiska innehållet i problemet. Man kan också ibland välja bevismetod. Men för ett givet problem kan matematikerna inte påverka vad som är sant och vad som är falskt. Matematisk forskningsverksamhet ger ett starkt intryck av att sanningarna redan finns där, de väntar på att bli upptäckta. Alla resultat är givna när väl definitionerna är bestämda – det är upp till matematikerna att ta reda på vad som gäller. Definitionerna uppfinns, resultaten (satserna) upptäcks. På det viset är matematiken delvis uppfunnen, delvis upptäckt.

VAD SÖKER EN MATEMATIKER?

Varje matematiker vill givetvis finna och bevisa så starka och intressanta resultat som möjligt, som kan härledas från lämpligen valda och intressanta förutsättningar. Väljandet av förutsättningar är en balansgång mellan det triviala (problemet är för enkelt) och det omöjliga (problemet är för svårt för befintliga verktyg). Den senare gränsen är naturligt nog mycket otydligare. De flesta matematiker blir nog både utmanade och lockade av riktigt svåra problem. Man brukar oftast hitta något uppslag där man kan börja nysta efter ett möjligt bevis, även om problemet är mycket svårt.

En matematiker i arbete har en hypotes om vad som är sant. Man letar efter ett bevis eller ett motexempel till sin hypotes, med endera så är uppgiften klar. Bevis och motexempel är hårdvaluta i verksamheten. Finner man ingetdera så har man inget resultat alls. Detta är en skillnad från experimentella resultat i tillämpade vetenskaper. Om man gör till exempel fysikaliska experiment som inte har gjorts tidigare, så är experimentets utfall i princip alltid ett resultat, antingen positivt eller negativt. Däremot kan en matematiker leta i månader och år efter bevis eller motexempel utan att lyckas, och står då utan publicerbara resultat. Ofta är det dock i praktiken möjligt att formulera och bevisa delresultat, i förhållande till det egentliga målet, vilka är intressanta och publicerbara.

Idéerna som inspirerar definitionerna kan komma från olika håll: från matematiken själv, från andra vetenskaper eller verksamheter, eller från vardagslivet. Oftast är det det förstnämnda alternativet. Nya resultat fångar in nya egenskaper hos dessa idéer. Bevisen är sätt att med matematikens byggstenar bygga framkomliga vägar mellan idéerna. Allt bör göras (förr eller senare) med matematikens speciella språk och räkneregler, av två skäl. Det första är att logiska bevis är det starkaste test vi har för att resultaten ska vara pålitliga, och logiken är inbyggd i språket. Det andra skälet är att andra matematiker oberoende av kultur ska kunna förstå och granska resultaten. Det matematiska språket är ett mycket kraftfullt internationellt kommunikationsmedel.

ANDLIG VERKSAMHET

Matematikforskning är en sorts andlig verksamhet, på så sätt att man vänder sig till sitt inre, till sitt tänkande, för att finna svaren. Matematiska forskningscentrum påminner något om kloster i termer av tystnad och stillhet, och att sanningarna upptäcks genom att vända sig mot sitt inre. Givetvis tycker de flesta matematiker mycket om att diskutera sitt ämne och sina forskningsproblem, och att läsa andra forskningsrapporter och böcker. Biblioteket är centralt, många gamla volymer spelar fortfarande en viktig roll. Datorexperiment har fått en viss betydelse i en del områden som inspirationskälla, och som delkontroll av hypoteser.

Matematik kan vara hur absorberande som helst. Ju mer man sysslar med matematik, ju mer breddas och fördjupas insikterna, ju fler blir de tillgängliga metoderna och verktygen, ju mer mångfacetterat blir det inre matematiska universum som varje matematiker gör sina upptäcktsfärder i. Det är ett matematiskt universum som märkligt nog är gemensamt med andra matematiker, olika personer är vanligen bekanta med olika delar av detta. Detta bekräftas av det faktum att varje gång som olika upptäckter är motsägande så kan man efter kontroll enas om att någon har missuppfattat någonting. Man blir överens.

Matematisk forskning liknar annan forskning på så sätt att varje besvarad fråga föder flera nya. Detta är ett underbart faktum för forskaren: forskningen tar aldrig slut! Dock, när nya områden öppnas är det ofta lättare att producera nya resultat. Därefter kan forskningsområdet bli ”utfiskat”.

MATEMATIKFORSKNING: KREATIVITET SOM FÖRVANDLAR MYSTISKT TILL KRISTALLKLART

Matematikforskningen förvandlar det okända, mystiska och spännande, till färdiga och oföränderliga formler och resultat, och öppnar samtidigt dörrarna för nya mysterier. Matematikerna är mentala skulptörer och upptäckare, som hanterar det till synes undflyende och diffusa. Vi lämnar efter oss bestämda och fixa former byggda av logik och abstrakta begrepp, som finns kvar oföränderliga, i evighet. De kanske glöms eller omformuleras, men innehållet kommer aldrig att förändras, varken lite eller mycket, varken gradvis eller plötsligt. Vi producerar resultat genom en process som kombinerar kreativitet, noggranna kontroller och intuition. Matematikforskarna gillar sina resultat, men gillar nog oftast ännu mer processen att nå dit.

TEORIERS LÖKFORM

Matematiska teorier har typiskt en sorts lökform: de består av olika skal utanför varandra. Ytterst finns de oräkneliga tillämpningarna. Nästa skal är det matematiska innehållet, resultaten, alla satser, bevis och definitioner. Till detta skal hör också alla typiskt förekommande exempel och vanliga räknemässiga knep. Innerst finns ett fåtal centrala begrepp samt metoder som används för att bevisa satserna. Ett litet antal begrepp och ett litet antal bevismetoder kombineras och används gång på gång på olika sätt för att härleda ett stort antal satser: svar på ett stort antal frågor.

Oftast får dessa centrala begrepp och metoder mening först efter att ett stort antal detaljer och delresultat studerats: det är då möjligt att se hur dessa sammanfattar och formulerar ett stort antal olika fall. Som alltid får generella begrepp betydelse bara i relation till ”sina” detaljer och specialfall. Detta betyder i praktiken att man som matematikstudent inte sällan måste prova en mängd saker som man ännu inte förstår. Detaljerna kommer oftast före helheten. Att studera matematik innebär verkligen att lära sig att tänka i nya banor.

MATEMATIKTÄNKANDE: INTUITION OCH LOGIK I VÄXELSPEL

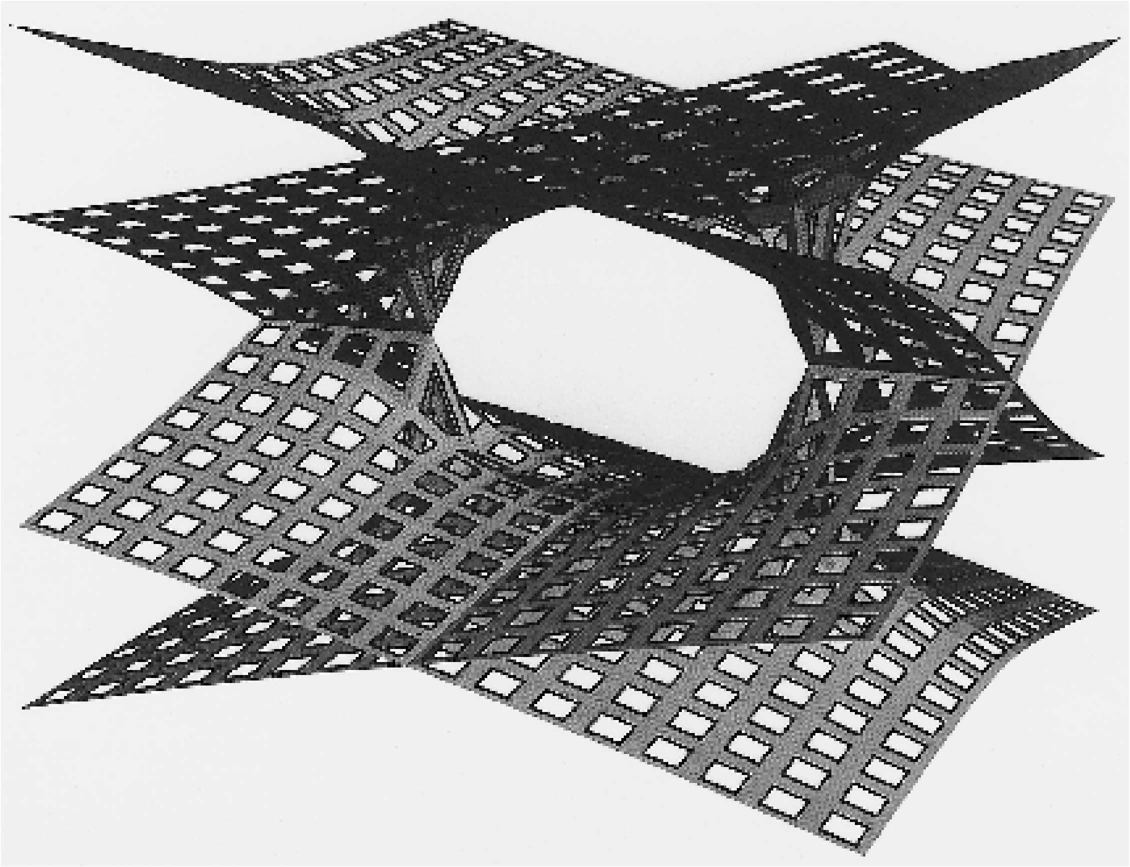
Logiskt tänkande är bara en del av det matematiska tänkandet, dock är det alltid en viktig komponent. Hur finner man då bevis och lösningar på matematiska problem?

Det finns inga enkla svar på denna fråga, det beror givetvis på vad det aktuella matematiska problemet tillåter. Men generellt kan man nämna analogi, intuition och diskussion som sätt att finna möjliga bevismetoder. Matematiskt tänkande är utöver logik uppställandet av hypoteser (gissningar), letande efter likheter, provande av olika fall, granskning av formler eller figurer. Matematiskt tänkande består typiskt av ett växelspel mellan intuition och logik:

1. Formulera en hypotes (intuition).
2. Försök bevisa eller motbevisa hypotesen (logik). Om det går bra så är uppgiften klar. Annars, gå till 3.
3. Finn orsaken till varför bevisförsöket inte fungerar (möte mellan intuition och logik).
4. Formulera en annorlunda bevismetod, eller ställ upp en ny hypotes (efter 3: förbättrad intuition).
5. Gå till 2.

Punkt 3 är här den oklaraste punkten. En ny hypotes kan betyda begränsning till ett delmål som är lättare att bevisa men ändå visar hur de ursprungliga problemet fungerar. Att dela upp ett svårt problem i många delproblem som är mindre svåra är en både urgammal och generell lösningsmetod som är användbar i alla sammanhang – inte bara i matematik. De intuitiva delarna kräver fantasi och nytänkande, dock beaktande de begränsningar och villkor som finns i problemet. De logiska delarna kräver noggrannhet och felfria kalkyler, dock utan att förlora det övergripande målet ur sikte.

I matematiska termer kan processen benämnas ”successiv approximation”. De matematiska kunskaperna är till en början kanske inte någon särskilt bra approximation av de matematiska förhållandena, men förbättras successivt för varje försök att formulera och bevisa en



Källa: Mankiewicz, R., *Matematiken genom tiderna*. Foto: Uppsala universitetsbibliotek.

En så kallad Riemann-yta. Det är ett exempel på abstrakt geometri där ytorna kan få ett oändligt antal dimensioner. Bernard Riemanns teorier fick bland annat betydelse för Einsteins allmänna relativitetsteori.

egenskap. I detta schema framstår innebörden av talesättet ”Logik har aldrig nånsin använts för att finna ett bevis.” ganska tydligt. Logik används för att *kontrollera* att bevis är korrekta, inte för att uppfinna dem, och inte för att se idéer och tänkbara bevisvägar.

ANALYTISK GEOMETRI – LOGIKEN SLÄPPS IN BLAND BILDER OCH FIGURER

I detta växelspel korrigerar och utvecklar den ”blinda” formella logiken ständigt och successivt den matematiska intuitionen och den geometriska uppfattningen. Detta är en konsekvens av vår analytiska geometri.

Antikens matematiker sysslade mycket med geometri, men det var inte analytisk geometri. Med analytisk geometri menas geometri där man karaktäriserar geometriska begrepp med ekvationer. Varje figur motsvaras av en ekvation (eller flera). Exempelvis representerar vi en rät linje med räta linjens ekvation, ekvationen är uppfylld bara för de punkter vars koordinater ligger på den räta linjen. Så fort vi har ekvationer kan vi skriva om ekvationerna på olika sätt med matematikens formelspråk, och få nya ekvationer vilka ofta har en annan geometrisk innebörd. Via ekvationerna influerar logiken vår geometriska insikt. Ekvationerna låter oss också räkna ut skärningspunkter och annat med långt större noggrannhet än vad figurerna tillåter.

FORSKNINGSVERKTYG: PAPPER OCH PENNA

Det finns matematikproblem av alla svårighetsgrader. Övningar i matematikkurser och problemsidor i tidningar presenterar (ofta intressanta) matematikproblem vars svar dock redan är kända.

Eftersom alla matematiska sanningar är givna när väl axiom och förutsättningar är givna kan man fråga sig varför vi inte ser alla sanningar direkt, åtminstone de största matematikerna borde väl kunna göra det? Nej, det är helt enkelt för svårt. Det är bevisat att det inte går att tillverka en matematikmaskin som producerar alla bevis. Inte alla argument i matematiska bevis är formallogiska. Sett i detta perspektiv handlar matematikforskning alltid om att övervinna de mänskliga psykologiska svårigheterna att se klart. Om ett problem inte är studerat förut, och som kan väntas ha ett visst långsiktigt matematiskt intresse, så är problemlösningen matematikforskning.

Om man tänker bort den matematiska omgivningen så kan man därför se varje problemlösning som en sorts matematikforskning, för problemlösaren. Det handlar alltid om att tillkämpa sig klarsyn. Matematik är en av få vetenskaper där man kan skapa kunskap vid sitt köksbord. I andra vetenskaper krävs observationer i verkligheten, inte endast i en mental värld.

MATEMATISK VERKSAMHET – HELT ANNORLUNDA ÄN MATEMATIK

De två, matematik och matematisk verksamhet, har nästan inga gemensamma egenskaper. Matematiken är evig, opersonlig, felfri och generell. Mänskligt upptäckande och lärande är i hög grad experimentellt, personligt, intuitivt och innehåller fel av alla möjliga slag. Kontrasten mellan ett ämne och dess verksamhet är antagligen ovanligt skarp i fallet matematik.

Arbetet är personligt: den som försöker lösa ett matematiskt problem prövar naturligtvis de metoder denne för tillfället känner till och tror är effektiva. Bara några veckor senare kanske andra arbetssätt är kända, och arbetandet med samma problem är annorlunda. Arbetandet styrs naturligtvis av de egna aktuella insikterna och åsikterna.

Dessutom kanske det personligt betingade experimenterandet är mer karaktäristiskt för lärande av matematik än för annat lärande. På grund av språkets exakthet och stränga men outtalade grammatik är det lätt att göra formella fel. Resonemangens abstrakta karaktär gör det ofta svårt att skönja räkningarnas mål och mening – det är lätt att innehållsmässigt bli disorienterad och komma vilse. Ganska typiskt för lärande av matematik är att något som ena stunden är obegripligt, kan lite senare vara enkelt och självklart.

Konstrasten mellan matematiken och matematikverksamheten är extremt stor, både på grund av ämnets höga exakthet och felfrihet, och på grund av verksamhetens mångfald av fel och ofrånkomliga provande.

Verksamheten, lösandet och sökandet, är naturligtvis helt central för de matematiska insikternas kvalité. Varje matematiskt verksam person använder vissa typer av argument för att välja metod att lösa ett visst problem. Dessvärre är problemlösningsstrategier och -metoder inte ofta nerskrivna, diskuterade och kända. Matematikutbildningen skulle vinna på att denna typ av argumentationer kommer fram i ljuset. Man kan avlyssna sådana problemlösningsargumentationer närhelst man är i närheten av forskare eller studenter som i grupp försöker lösa ett matematiskt problem.

DET FINNS FYRA KATEGORIER MATEMATIKVERKSAMMA

Man kan tala om fyra kategorier som sysslar med matematik: studenter, lärare, forskare och tillämpare. Tillämparna kan vara både civilingenjörer i industrin, och forskare i matematikintensiva vetenskapsgrenar. Självklart kan samma person spela flera av dessa roller.

Av dessa kategorier är lärarna de enda som sysslar med matematik som de redan behärskar. Forskarna behärskar sitt ämne, men försöker oftast lösa problem i utkanten av sin förmåga. De breddar sina kunskaper mest hela tiden, och möter därför ny teori som de inte kan. Civilingenjörer och forskare i tillämpningsområden kan ibland slippa undan med enkla matematiska problem. Den matematiska modellen för problem i industrin kan dock oftast göras mera exakt, och därmed mera matematiskt avancerad. Studenter sysslar uppenbart med matematik som de inte behärskar i förväg.

Lärarnas uppgift är att på tydligast möjliga sätt presentera en matematisk teori som de behärskar. Detta är inte en matematisk problemlösningsuppgift, det är en rent pedagogisk uppgift. De övriga kategorierna ägnar sig huvudsakligen åt att vinna ökad förståelse.

FÖRELÄSNINGSMISSFÖRSTÅNDET

Eftersom studenterna bara ser lärare som presenterar en perfekt teori kan studenterna förledas att tro att detta är typiskt för matematiker: för en matematiker är all matematik glasklar. Ett sådant intryck är ett allvarligt missförstånd och ett problem för matematikutbildningen. Det mesta i matematikkursen är nog glasklart för läraren, men det finns alltid mycket annat. Kontrasten mellan lärarens felfria verksamhet och det egna provandet kan leda studenter att felaktigt tro att de själva inte är lämpade för matematik. Matematikbegåvade personer inser förvånansvärt ofta inte sin begåvning.

Föreläsning är ett”naturligt” undervisningssätt: de som vet berättar för de som inte vet, och många kan givetvis lyssna samtidigt. Men det finns alltså vissa nackdelar i termer av studentaktivitet, särskilt om detta inte motverkas av föreläsaren. Det är nog också centralt att denne tar fram sin egen fascination för ämnet.

MASSOR AV MISSFÖRSTÅND OCH KONTRASTER

Det finns en stor mängd missförstånd och egendomliga kontraster om matematik. Jag beskriver här i första hand universitet/högskolenivå, här är kanske konstrasterna störst. Här är några:

1. Den roligaste biten i matematik, som vid de flesta intellektuella verksamheter, är nog att prova och upptäcka vad som är sant. Denna sida av matematiken är tyvärr nästan helt osynlig och frånvarande i dagens matematikutbildning. Studenter sysslar förstås med en del problemlösning, men denna syns inte i föreläsningar och läroböcker och upplevs alldeles för ofta som misslyckande. För en student är ämnet i första hand det som skolan visar upp.

2. Matematisk kunskap, liksom all vetenskaplig kunskap, vilar ytterst på det kritiska tänkandet. Genom invändningar kan man upptäcka på ett reellt sätt att de matematiska sanningarna verkligen håller, att de tål och överlever alla möjliga typer av kritik. Dagens matematikföreläsningar och läroböcker är tyvärr nästan helt fria från invändningar och kritiskt tänkande.

3. Rätt och fel vid problemlösning spelar inte så stor roll. Viktigast vid matematikarbete är att inte ge upp, samt naturligtvis att söka sanningen. Det är mindre trevligt om svaret från en matematisk kalkyl blir fel. Men, om den studerande inte ger upp och vid behov frågar en lärare, så är den ”onödiga” tid som gått åt inte bortkastad. Det leder ofta till att studenten är bäst insatt i just dessa moment. Man blir vanligen bekant med bredare aspekter av matematik när man finner och korrigerar ett fel. Det finns en hel del prestige förknippat med rätt och fel, som ger låsningar och omintetgör mycket matematiklärande. Vid tillämpning av kunskaperna är rätt och fel avgörande. Utbildningen går ut på att lära sig skilja vad som är korrekt från vad som är inkorrekt, och då gör det inte så mycket om man börjar med det ena eller med det andra.

4. Matematiklärande handlar om personliga ställningstaganden. Matematik är abstrakt och opersonligt, men det betyder inte att kunskaperna kan slinka in i hjärnan bakvägen, utan att granskas och ifrågasättas. Lärande betyder att ställa nya eventuella kunskaper och tidigare uppfattningar bredvid varandra, och finna något sätt att få de båda att gå ihop. När denna sammanjämkning uppskjuts, vilket förstås är nödvändigt ibland, så uppskjuts matematiklärandet. Det brukar vara precis den matematik som har

Matematik med engagemang. Förstaklassare får undervisning.

Foto: Folke Hellberg/Pressens Bild.

skapat visst engagemang som finns kvar i minnet ett år senare. Dessutom gör varje individ vissa typer av fel. Att lära sig är att se och upptäcka sina *egna* specifika svårigheter, att lösa upp *personliga* missförstånd. Lärande handlar alltid mer eller mindre om att lära sig se sitt tänkande. Det gäller matematik särskilt mycket, eftersom matematik inte är något annat än tänkande.

5. Det finns många studenter som lämnar högskola/universitet, och har läst flera matematikkurser på universitetsnivå i sin utbildning, som anser att forskning i matematik är onödig eller omöjlig. Många tror att de matematikkurser de har studerat är all matematik som finns. Då har inte mycket av matematikens karaktär och kultur förmedlats i kurserna.

MATEMATIKDIALOGER KAN GE IDENTIFIKATION, PERSONLIGHET, SPÄNNING OCH KRITIK

Matematikkurserna täcker oftast många matematiska begrepp, men ger i gengäld ganska ytliga kunskaper: det finns sällan tid att också avtäcka begreppens innebörder. Alternativt riktar man sig mot de mest begåvade studenterna. Men vem vet, det kanske inte finns bättre didaktiska metoder, dagens utbildning kanske är den minst dåliga, om man tar med alla svårigheter. Och bör i så fall kallas den bästa tänkbara. Vi kanske faktiskt lever i den bästa av alla tänkbara världar, just som Pangloss envist hävdar (Candide).

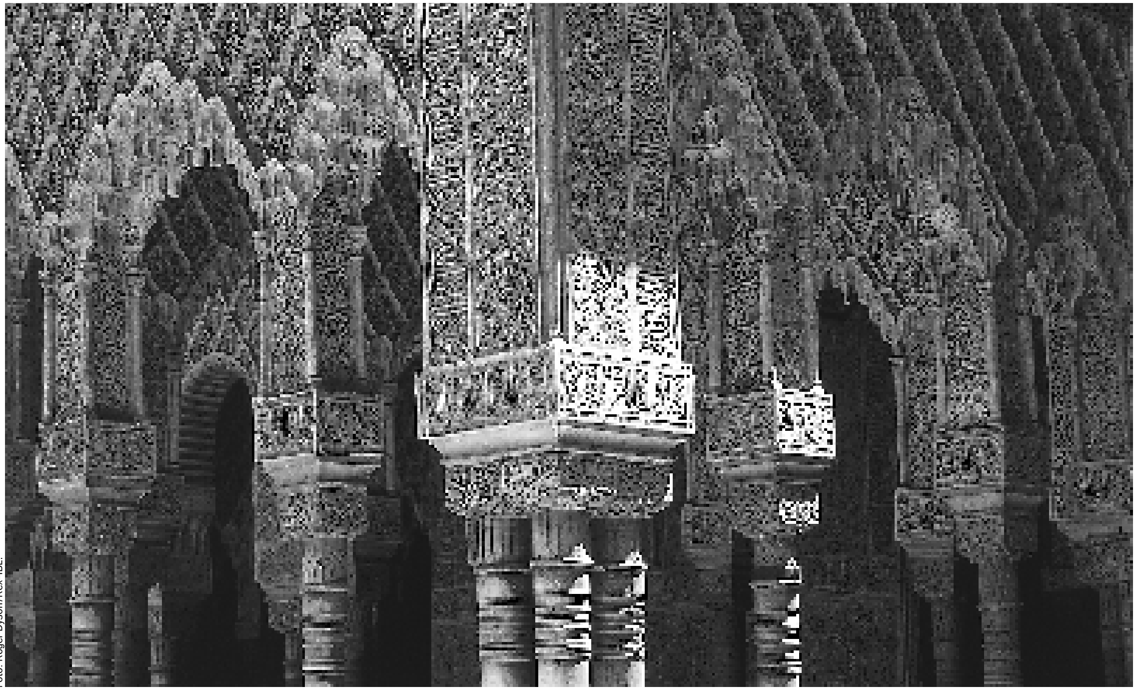
Om studenterna aldrig gör fel är kurserna onödigt lätta och ger för lite utbyte. Kurserna är gjorda ”lagom” svåra, i praktiken så det inte är för få eller för många felräkningar, i någon mening. Vad gäller matematik på tekniska utbildningar så finns det också för nästan varje moment i matematikkurserna tillämpade kurser i utbildningen som kräver denna matematik. Kurserna är fullproppade med matematiskt innehåll.

Undersökningar visar att studenter och elever oftast anser att matematik är svårt, ofta tråkigt men ändå ett av de allra viktigaste ämnena. Matematikens tråkighet hänger kanske samman med att ämnet är ytterst opersonligt. Men matematisk problemlösning och upptäckande är som nämnts verkligen inte opersonlig! Att från utbildningsarrangörens sida visa upp detta innebär inte bara ökat engagemang, det betyder också ett bejakande av det vridande och vändande som är typisk matematikverksamhet. Det ger en riktigare beskrivning av matematikämnet.

Motviljan hör förstås samman med svårgenomträngligheten. Men det borde inte vara så svårt att identifiera sig med studenter som ibland uttrycker bottenlösa svårigheter, men finner, från varandra, lärobok eller lärare, trådändar där de börjar dra, och den ena matematiska innebörden efter den andra framträder. Det är också ett ganska typiskt händelseförlopp. Om sådana dialoger finns med i läroböckerna får matematikämnet genast en annorlunda karaktär.

Student-lärardialoger kan naturligt leda in på lärarens forskningsverksamhet. Detta ger studenterna både insikter i matematikkulturen, i matematiken som vetenskap, och nya perspektiv på det egna räknandet. Naturligtvis är enskilda studenter mycket olika. Vissa har problem med matematiskan och har lätt för innehållet, för vissa är det tvärtom. För vissa är den traditionella framställningen den utan tvivel klaraste. I dialoger kan olika personligheter förekomma, så de flesta studenter som söker det kan finna och känna igen sina svårigheter.

Förskolebarn är forskare av naturen. Något händer under skolgången. Felet kan vara att vi tror att lärandet kan vara opersonligt. Det är det inte, hur opersonligt ämnet än är. Och det är i mötet med det personliga som spänningen, upptäckandet och glädjen finns. **T**



Ornamentiken i palatset Alhambra är så noggrant gjord att den kan beskrivas med matematiska formler. Alhambra, nära Granada, är den islamska tidens sista praktbygge i Spanien, cirka 1250–1400.

Foto: Roger Dyson/Rex-IBL.

LITTERATUR

Imre Lakatos: *Bevis och motbevis*. Detta är en klassiker. En dialog mellan en lärare och ett stort antal (ytterst engagerade) studenter angående ett skenbart väldefinierat problem. Frågor och svar och motfrågor och motsvar får teorin runt problemet att dela upp sig i ett antal definitioner och ett antal olika delproblem och delresultat. Typexempel för hur en teori föds och växer. Det matematiska språket erbjuder alla skilda viljor en tydlig mötesplats. I. Hadamard: *Mathematician's Mind*. Hadamard (som är en berömd matematiker) hävdar att kreativitetens rötter har att göra med undermedvetna estetiska val, vilka därefter når det medvetna. Han motiverar detta med språkliga, psykologiska och visuella argument. Boken innehåller en brev av Albert Einstein där denne analyserar sin egen tankeprocess. *Sigma 1–6* är ett klassiskt verk om matematik ur alla synvinklar. Jag finner artiklarna om matematikens natur alltför begränsade i sitt perspektiv för att förmå säga särskilt mycket väsentligt i denna fråga. Författarna försöker ofta behandla frågan om matematikens natur med matematiska verktyg, men frågan är ju snarare metamatematisk. Artiklarna är dock intressanta på andra sätt. Simon Sing: *Fermats Gåta*. En trevlig och lättläst bok om matematisk forskningsdramatik med lång historia. Boken tar upp många angränsande matematiska klassiska problem. Jag vill varna känsliga läsare, ty författaren byter ibland beteckningar från de gängse på ett något överraskande sätt. Han ger också ibland en ganska idylliserad eller förenklad bild. *Den fantastiska matematiken* av Kristin Dahl skildar nedslag i ganska aktuell forskningsmatematik, varav flera har klara konstnärliga kvaliteter. Forskande matematiker ger sin syn på denna och på sin verksamhet. En spännande och inspirerande bok.

HÅKAN LENNERSTAD, f. 52, är docent i tillämpad matematik. Han doktorerade på Chalmers Tekniska Högskola inom området partiella differentialekvationer, men har sedan dess forskat huvudsakligen inom kombinatorik för parallelldatorer vid Blekinge Tekniska Högskola. Han är också uppfinnare och läroboksförfattare i matematik.