

Matematikkartor

När elever tillsammans konstruerar matematikkartor uppstår naturligt diskussioner om matematiska begrepp, samband och helheter. En hel matematikkurs ryms i en färgrik karta.

Vad många ord det är i matte. Addera, plussa, lägga ihop ... Minska, dra ifrån, gånger ... täljare och nämnare och delat med och division och bråk och tal och siffror ...

- Vad säger ni, ska vi göra en karta över alla orden?
- Vad? Karta? Är det inte matematik vi har?
- Jo men hör nu. Vi skriver alla ord vi kommer på, och sen försöker vi sortera dem, kanske i olika länder! Och sen får vi se hur de hänger ihop, kanske över gränserna med floder, bergskedjor och skogar till exempel. Så kanske vi får lite ordning på alla matteord!
- Ja det vore ju bra, men är det möjligt? Och vilka är matteord? Är miniräknare ett matteord?
- Vi använder ju miniräknare i matten i alla fall.
- Men det är inte matte för det, det är bara för att räkna ut matte.
- Som en penna. Är penna ett matteord?
- Asch, sluta nu! Vad ska vi göra med alla ord nu då?
- Vi ska ju göra en karta! En karta över Mattelandet.

*Håkan Lennerstad är universitetslektor
vid Blekinge Tekniska Högskola
Krister Larsson är universitetsadjunkt vid
Linköpings universitet*

- Vi gör ett område av siffreräkning ... siffra ja. Siffra. Det är inte samma som Tal. Trettiofyra är tvåsiffrigt, har två siffror. Det finns bara tio olika siffror men hur många tal som helst!
- Ja Siffra måste vara med.
- Jag fattar fortfarande inte vad vi ska göra med det.
- Jo vi måste bestämma oss. Jag tycker nog att Addition ska vara en stor flod med många små byar, som heter 1, 2, 3, 4. Den har en biflod som heter Subtraktion. De negativa talen -1, -2, -3, -4 är små byar som ligger på andra sidan Addition, tycker jag, lika långt från floden! Men närmare Subtraktion.
- Och floden Addition delar sig i en flod Multiplikation, för multiplikation är ju addition många gånger.
- Ja, en biflod. Men hur blir det med floderna? Hur hänger de ihop egentligen?
- Men positiva och negativa tal är olika, de kan väl vara olika landskap i Heltal och Bråk? Då rinner Addition just längs gränsen.
- Ja! Och noll är varken positivt eller negativt, så Noll är en stad som ligger på den gränsen ...

– Ja, Noll ligger på en ö i floden Addition!
Fortsättning för grundskolans mellersta del

- Ja! Där Subtraktionsfloden går ut också tycker jag. Men var ska π vara?
- Mellan 3 och 4 väl.
- Nä, tycker jag inte, för π är en annan sorts tal. Bör vara i ett annat land.
- Men Division då? Det får bli en biflod till ... som kommer från ... Multiplikation förstås!
- Jo, man kan göra på olika sätt. Vi som gör kartan bestämmer vad vi tycker passar bäst!
- Subtraktion kommer också från addition, så det bör vara en annan biflod, som går åt ett annat håll.
- Ja åt ett lugnare håll då, för multiplikation och division är mycket svårare. Floden Subtraktion rinner ut i ett stillsamt slättland.
- Så mycket floder ... de kommer från sjöar. Addition kommer från Addisjön!
- Ja! Och Division från Divisjön! Multiplikation från Multiplikasjön! Hihi!
- Men decimal och decimaltal måste ju vara med också.
- Ja men hur hör de ihop med bråk?
- De får vara för sig. Tur man har räknat en del, annars skulle man inte fatta det här.
- Är division svårast?
- Nej, procent.
- Okej, då blir både division och procent bergsland, för det är svårare att komma fram i bergstrakterna. De ligger bakom bergskedjor.
- Bråken ligger uppe i bergen och lurar!
- Där kan vi ha procent också.
- Just det, nu börjar du också fatta!
- Procent är en vulkansjö! Som slukas av ett vulkanutbrott, sen har vi aldrig någon procent mer!
- Men var rinner floderna ut? I ett hav ... kanske i Talhavet, i talens milsvida ocean?
- Där mycket döljer sig i djupet, som ingen ännu någonsin sett ...
- Siffror måste vara en stor stad, för det är

ju viktigt.

- Just det. Det viktiga är stora städer.
- Kanske ligger Siffra innan Addition har delat sig?
- Ja. Och en hand ska väl vara med ... Vi har tio fingrar, därför har vi basen tio.
- Staden Handen ligger just innan Siffran.
- Det är bra för där kan man ta pendeltåget in till Stockholm.
- Fast två händer. Tio siffror, fem plus fem.

Fortsättning för grundskolans senare del

- Okej. Men jag tänkte på ... ska Bråk bli ett område för sig, och Decimal ett för sig, som delas av floden Division?
- Eller så är Bråkstreck en biflod till Division, med Nämnare och Täljare på var sin sida.
- Okej. Jag tycker i alla fall att vi har två olika länder, Heltal och Bråk. Floden Division rinner bara genom Bråk, men Addition rinner genom båda.
- Är Decimal ett annat land än Bråk då?
- Nej, tycker jag inte, för de är ju egentligen samma tal. Det kan stå $1/4$ (0,25) på en stad, två olika namn för samma stad. Som Gdansk i Polen har det tyska namnet Danzig, som ibland står i parentes. Eller Peking och Beijing.
- Och $1/3$ har det svåruttalade namnet 0,333... .
- I alla fall kan Decimal och Bråktal vara två städer nära varandra, för det är lite olika idéer, även om samma tal kan skrivas på de två sätten.
- Jag tycker att Bråk ska delas in i flera delområden: Ändliga decimaltal som 0,25 och sådana som 0,33333..., du vet när siffrorna aldrig tar slut.

Fortsättning för gymnasiet

- Du menar periodiska tal. Och sen har vi dom som inte har någon period. Som π .
- Om man vill kan man ta med det också. Det är ju irrationella tal. Ännu värre.

- De är inga bråk, de är utanför bråklandet.
- Då har vi ett land till, Irrationella.
 - Då måste π ligga mitt i en cirkel, en Cirkelslätt eller en Cirkelskog!
 - Vad då irratio ... Atjo!
 - För du kan inte skriva π som ett vanligt bråk, det blir alltid lite fel om du försöker.
 - Vanligt bråk, alltså med heltal uppe och nere. Det är samma sak med roten ur två.
 - Kanske Bråkstreck är en bergskedja och Liggande stolen är en annan?
 - Ja! Man får ju träna med dem, de är lite jobbiga, så det bör vara jobbiga berg.
 - Eller så är de bergssjöar, väldigt flikiga för det är en massa specialfall ...
 - Det är praktiska saker, inte så matematiska.
 - Då har vi Praktiska Träsket! Med träsksjöarna Procent och Liggande Stolen! Och Promille.
 - Och här finns Procent. Vid procent ligger förstäderna Hundra (100) vid ena sidan och Hundradel (1/100) vid den andra.
 - Då borde Procent ligga på gränsen mellan Heltal och Bråk, så Hundra ligger i Heltal och Hundradel i Bråk. Men varje gång det är val pratar man hela tiden om procent.
 - Och på banken.
 - Så Praktiska Träsket har ett område med bankord, och ett med valord. 4% och Ränta är byar i träsket.
 - Ja, ni har fattat galoppen! Låt oss rita ut det här!
 - Vänta, promille är ju en tusendel. Så det finns en mindre stad Promille lite längre bort, med förstäderna Tusen (1000) och Tusendel (1/1000). Vid en träsksjö som ser ut som en flaska ...
 - Skärpning – nu måste vi sätta igång att göra någonting. Vi gör en skiss först så vi vet vad vi ska ha med.

Fortsättning på högskolenivå

- Men vi är inte klara! Vi har också de Kom-

- plexa! Egentligen borde alla andra talområden vara delprovinser i Komplexa.
- Polär form och rektangulär form måste vara huvudstäder i Komplexa! Polär form har två förstäder: Belopp och Argument (Vinkel), den senare ligger vid en liten sjö som heter Positiva X-axeln. Men sen funkar ju inte olikheter här ...
 - Naturtyp! Den farliga Olikhetsskogen går genom alla länder, men inte i Komplexa!
 - Och Polär form ligger nära ett helt annat land, Linjär Algebra, som man skymtar i utkanten. I Linjär Algebra skymtar staden Avståndsformeln, som ligger nära Belopp – just på andra sidan gränsen ... De är ju samma sak.
 - Och här har vi Vektorlandet och floden Linjärkombination, med städerna Linjärt Beroende och Linjärt Oberoende på varsin sida ... och Bas på samma sida som Linjärt Oberoende ...
 - Men nu börjar det bli lite väl mycket, nu pratar du om ett annat land. Vi samlar oss.

Matematikkartornas grundidéer

De ovanstående samtalen är inte autentiska (men skulle kanske kunna vara det). De försöker illustrera hur en matematikkarta kan växa fram ur elevs och lärares formuleringar av sina kunskaper och erfarenheter i matematik. Att rita kartan överläts till läsaren.

Matematikkartor kan göras på vilken matematisk nivå som helst. Här är några förslag. En karta över:

- Additionslandet
- De fyra räknesätten
- Geometrilandet
- Kurs A-landet
- Trigonometrilandet
- Det område som ska bli föremål för undervisning

- Envariabelanalys

I innerpärmen i boken "Envariabelanalys med dialoger" (Lennerstad, 2002) finns en matematikkarta av det sistnämnda slaget. Detta är oss veterligt den första matematikkartan. På webbplatsen www.bth.se/analysmeddialoger (se *Om Boken och Några avsikter med kartan*) finns en diskussion om dess uppbyggnad, samt den del av denna karta som svarar mot matematiken i ovanstående dialog (här dock med floden Ekvationslösning, ...). Om ni gör en karta, så skulle författarna vara mycket tacksamma om ni ville skicka en kopia av den till Hakan.Lennerstad@bth.se.

I slutet av denna artikel finns några kommentarer från lärarstudenter vid Linköpings Universitet. De ritade matematikkartor över matematiken för grundskolan.

Landskapsmetaforens kraft

En matematikkarta innehåller de viktiga matematikorden i ett visst matematiskt område, dvs terminologin. Den kan också inkludera tal och formler. Ordens placering på kartan antyder begreppens inbördes samband. Detta är vad eleverna söker sig fram till när de konstruerar en karta. För sambanden används en för alla känd metafor – en karta över ett landskap. Detta är konkret och välbekant så det är lätt för alla att delta. Den ger ett samband mellan egna erfarenheter och matematik. Landskapsmetaforen genererar genom sin tillgänglighet mycket energi och skaparkraft. Därför är den central för matematikkartorna.

Framväxande helhetssyn

En matematikkarta kan konstrueras av lärare och elever tillsammans när man tar sig igenom nya matematikavsnitt. Under arbetets gång kan man komplettera och fullborda kartan, som sedan utgör en do-

kumentation av vad man diskuterat sig fram till. Man kan också tänka sig att tematikkartan successivt konstrueras av en klass vecka för vecka. Det innebär att man i slutet har tagit del av varandras skilda tolkningar av matematiska begrepp och tränat på att diskutera hur man tycker att matematiken hänger ihop. Man har vunnit en helhetssyn. Och det kan för många elever kännas befriande att finna ord för det räknande man sysslat med under hela sin skoltid.

Självstartande diskussioner – matematik utan räkning

Diskussionerna handlar om orden och begreppen, deras innebörder och samband, och inte så mycket om räknandet. Det är matematik utan räkning. Dessa elevdiskussioner tycks komma igång nästan av sig själva. Sådana diskussioner har varit en pedagogisk målsättning i många år, men en målsättning som inte har varit lätt att förverkliga. Matematikkartor tycks vara ett effektivt verktyg i detta syfte.

Man prövar sin matematikuppfattning medan man väljer förslag på landskapsutformning, och väljer namn. Landskapet replikerar med matematikförhållanden att ta ställning till, nämligen diverse oavsiktliga konsekvenser i föreslagna kartskisser.

En karta över ett matematiskt område kan se ut på många sätt, ty den uttrycker matematiska samband tillsammans med den egna personliga matematikuppfattningen. Det kan gälla bergskedjor för vad som uppfattas som svårt, städers storlek för vad man anser är viktigast i kursen, vad som är floder eller berg, hur de hänger samman. Detta kan ses som lärandets mål: att få till stånd riktiga möten mellan å ena sidan etablerad ämneskunskap och å andra sidan elevers personliga, faktiska uppfattningar.

Minnesbilder för det abstrakta

Kartan kan användas som en sammanställning av minnesregler. Exempelvis, om man lätt glömmer om det är procent eller promille som betyder tusendel kan man bara kasta en blick på kartan. Här står Promille bredvid Tusendel, och Procent bredvid Hundradel. Denna användning gäller i högre grad ju mer abstrakt och främmande terminologin är.

Kartan är en sammanfattning över en matematikkurs, innehåller minnesbilder och är lätt att göra estetiskt tilltalande. Den är resultatet av ett långvarigt

gemensamt arbete. Det är fyra faktorer som gör den lämplig att sätta upp på en anslagstavla i skolan.

Matematikkartor, begreppskartor och logiska grafer

Med en begreppskarta (se Andersson, 2002) kan matematiska begrepp sorteras med större matematisk precision än med en matematikkarta. Begreppskartan inkluderar inte de personliga matematikuppfattningarna. Men den stora skillnaden mellan en matematikkarta och en begreppskarta är matematikkar-

Förslag till metaforer

Tabellen ger några förslag på metaforer som kanske kan lämpa sig för övre grundskolenivå.

Matematik	Geografi	Exempel (se även dialogen)
Område	Land	Tal, Geometri
Del av område	Provins i land	Hela Tal, Decimaltal, Trianglar, Cirklar
Genomgående tema, begrepp eller metod	Flod	Ekvationslösning, Tal, Obekanta
Huvudbegrepp o resultat	Större städer	Procent, Vinkelsumma i (landet) Triangel, Area, Kvadratkomplettering, π
Primitiva begrepp	Byar, minnesmärken	2, 3, 4,... -2, -3, -4,... 1/2, 1/3, 1/4...
Kalkyler med lite räkningar	Oflikiga sjöar	Addition och Multiplikation av små tal
Kalkyler med mycket räkningar	Flikiga sjöar	Division av stora tal (olika beräkningsätt), Andragradsekvationer
Effektiva hjälpmedel	Motorvägar	Miniräknare
Besvärligt område	Bergsmassiv	Trigonometriska problem, Dubbelbråk
Enskilda särskilt stora besvärligheter	Vulkaner, raviner	Oändligheten
Tillämpade begrepp	Träsk, kärr	Lästal, Bankräntor, Mått, Enheter
Matematiska begrepp som förekommer i par	Ömse sidor av relevant flod	2 och -2, 2 och 1/2, Maximum och Minimum, < och >
Omöjliga fall	Reservat	Nolldivision
Matematisk fortsättning, framtida kurser	Länder i kartans utkant (Städer)	Tredjegrads ekvationer, Rymdgeometri (Klot), Statistik (Tärning)
Resultat dominerat av "avlägsna begrepp"	Kolonier	Rektangels area domineras av Multiplikation

tans landskapsmetafor.

En tredje typ av grafisk framställning av matematik som är ganska nära besläktad med en begreppsgraf, är en logisk graf (Lennerstad, 1996a, 1996b). Detta är ett alternativt sätt att representera matematiska bevis men också överblickar över matematiska områden. Genom att logiken skrivs i grafform får läsaren mera överblick och mera frihet vid matematikstudier. Inte heller logiska grafer använder landskapsmetaforen.

Kommentarer från lärarstudenter

Jag tycker det var positivt att få ner hur mycket som faktiskt ingår i matematiken även om vi gjorde endast år F-6. Jag tror att jag tänkte till lite över hur man skulle kunna arbeta sig igenom de olika områdena på ett bra sätt. Vissa hör ju liksom ihop. Precis som du sa tror jag att det är ett bra sätt att visa för föräldrar (men även elever) hur mycket det faktiskt är.

Jag tyckte att det var jobbigt men är idag väldigt nöjd med resultatet. När jag började hade jag lite idéer, men när det var klart såg jag fler samband på stoffkartan än vad som var tänkt när jag satte igång. T.ex. det oroliga geometrilandet, matematikens "arabvärld".

Positivt:

– bättre överblick över matematikkunskapernas nyckelbitar

– lätt att återgå till (struktur och egen uppläggnig)

– kan göras var för sig, individuellt anpassad

– kreativt, lättare att förstå att matematik är ett landskap av begrepp

Svårt:

– kort om tid, svårt att göra i grupp

– svårt att veta vad man ska skriva/ta med. Tex. addition, addition med tvåsiffriga tal, addition med tresiffriga tal etc.

– Uppläggnigen svår eftersom alla ville ha med sina åsikter. Kunskaperna varierar

från skola till skola pga att varje skola har en lokal ämnesplan. MYCKET TID BEHÖVS!!

Upplevelsen var den att ett matematiskt landskap med en mängd olika kunskapsbitar växte fram. Större överblick över ämnet. Omvärldsuppfattningen ger en grund för kartan.

Jag tyckte det var svårt att förverkliga en stoffkarta, detta berodde på bristande fantasi! Med hjälp av en mycket fantasifull medstudent fick jag i alla fall fram det värdefulla. När hon visade det hon hade fått fram som karta över de matematikkunskaper som mellanstadieelever ska igenom, var det både roligt, spännande och fängslande att gå igenom kartan, med PI-deltat och tidshalvön och många andra effektfulla idéer. Jag tycker matematikkartor är en rolig ide, men jag tror många behöver hjälp på traven med fantasin.

Jag har bara positiva erfarenheter. Det blir ett sätt att göra matematik vackert. Jag tror på idén att låta elever göra en karta, men jag tycker också att det är ett bra sätt för ett arbetslag att konkret få ner på papper vad t ex 7-9:ans matte ska handla om. Jag ser det som ett sätt att integrera olika ämnen, men även en möjlighet att släppa beroendet av matematikboken.

REFERENSER

- Andersson, A. (2002). Begreppskartor – ett verktyg för bättre förståelse. *Nämnamn* 29(2), 44-47.
- Lennerstad, H. & Pettersson, E. (1999). Läroböcker bör vara student-lärdialoger. I B. Grevholm m fl (red) *Kvinnor och matematik: Konferens Uppsala Universitet 16-18 april 1999: Konferensrapport*. Uppsala: Matematiska institutionen.
- Lennerstad, H. (1996a). Logiska grafer – att kartlägga matematik. *Normat* 44(3).
- Lennerstad, H. (1996b). Logical graphs – how to map mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (International Reviews on*