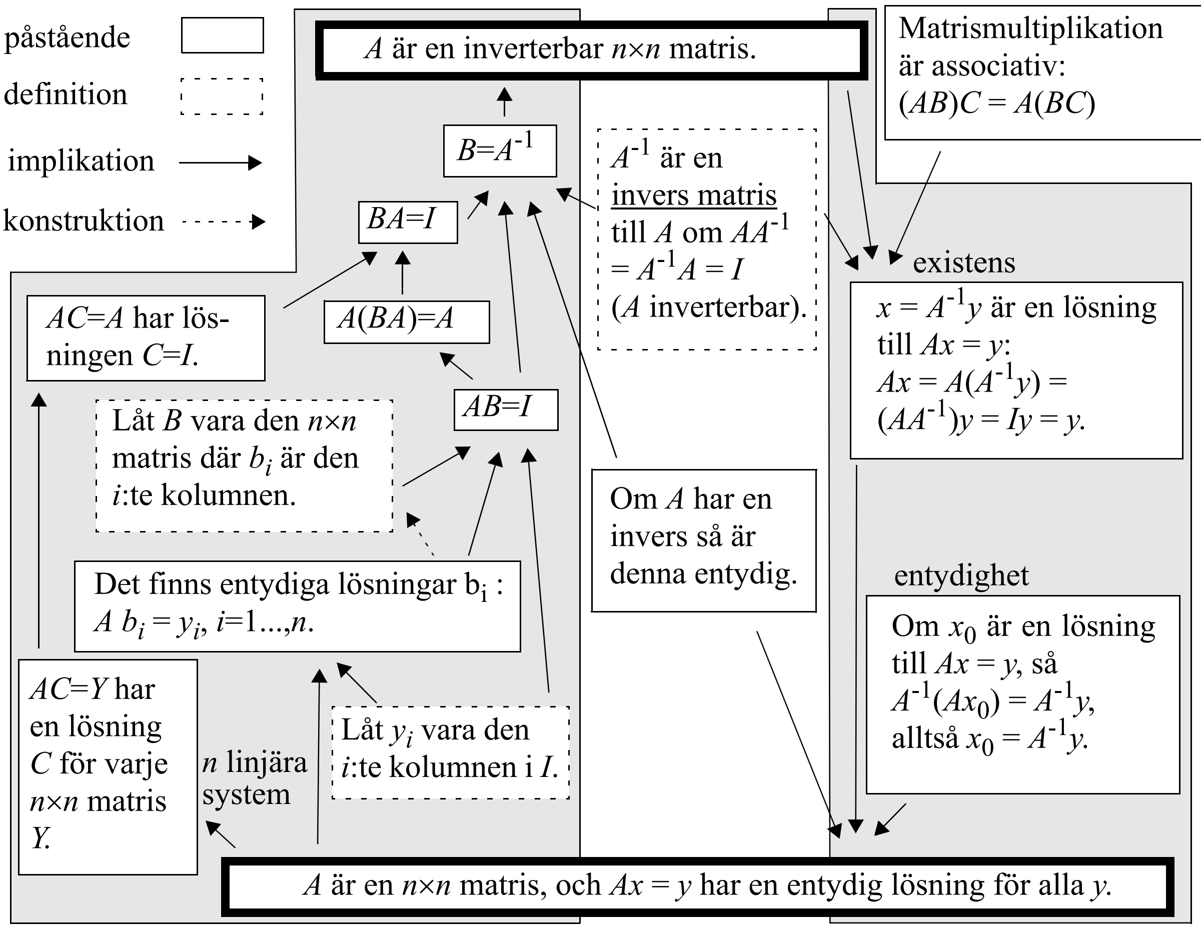
# Logiska grafer - att kartlägga matematik

*Håkan Lennerstad*
*Blekinge Tekniska Högskola*

"We have not begun to understand the relationship between combinatorics and conceptual matematics."
J. Dieudonné, *A Panorama of Pure Mathematics* (1982)

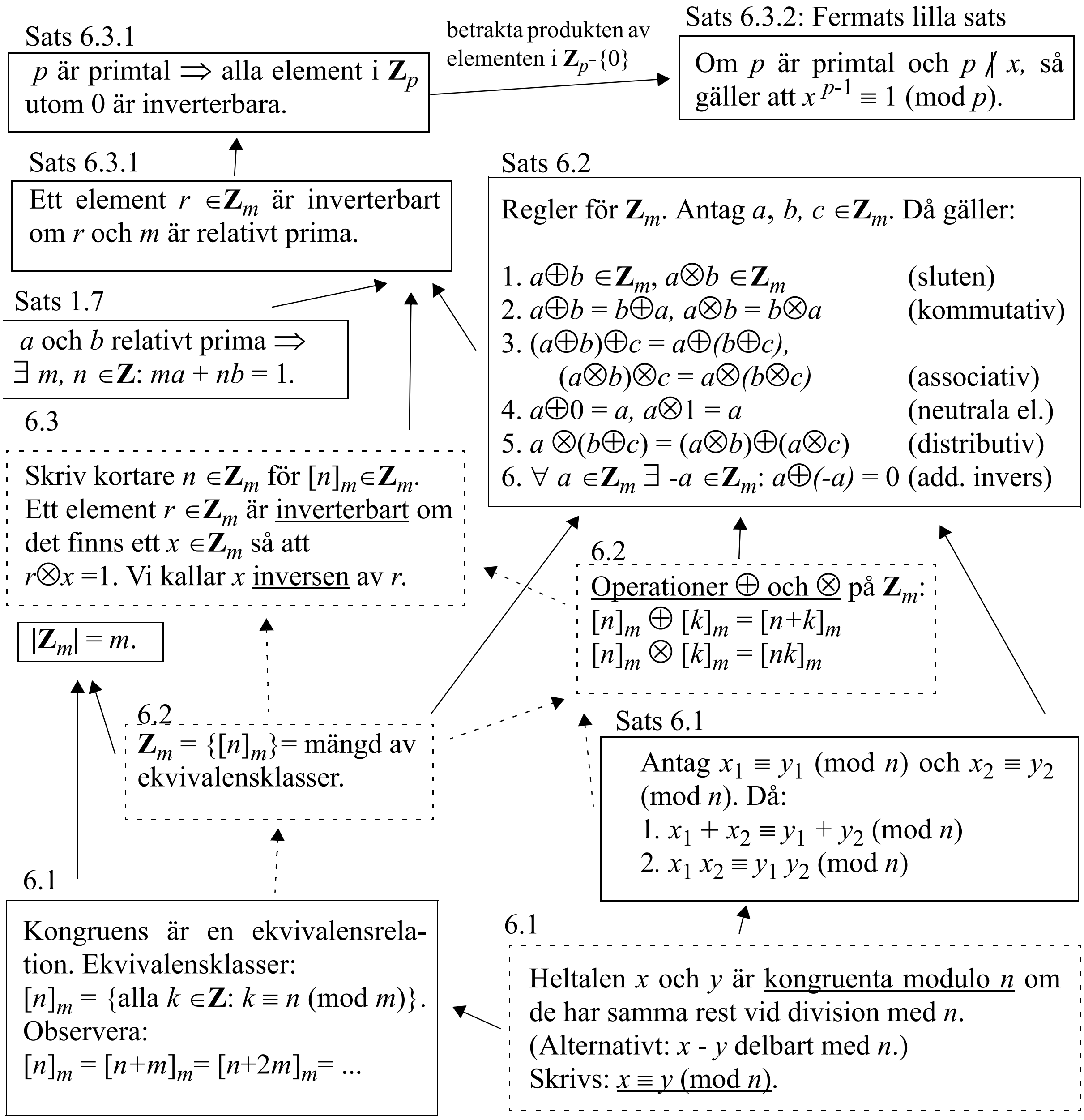
En logisk graf är en riktad graf med vilken varje matematisk teori eller bevis kan presenteras. Med denna typ av presentation är den logiska strukturen omedelbart synlig. Av detta och andra skäl är det matematiska innehållet åtskilligt mera tillgängligt för läsaren än när det är presenterat i linjär, berättande form.
Framställning med logiska grafer kan vara ett värdefullt komplement till den vanliga berättande presentationsmetoden, både i matematikkurser och på forskningsnivå. Denna artikel presenterar grundläggande definitioner för logiska grafer, och exempel på dess användning.




*Graf 1.* Kartlagt bevis: Om $A$ är en kvadratisk matris, så är $A$ inverterbar om och endast om $Ax=y$ har exakt en lösning för varje $y$.

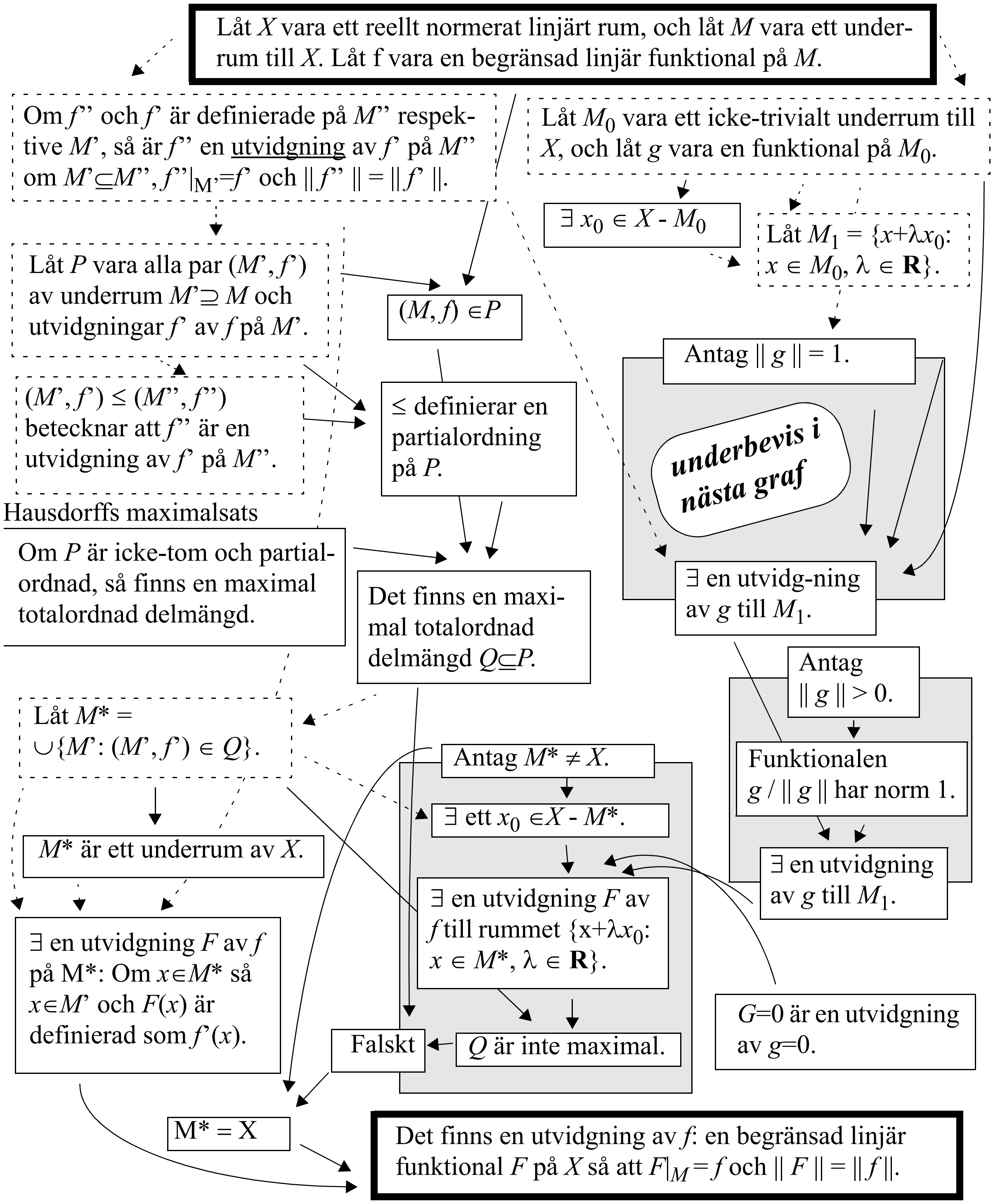
## Definitioner

*Definition 1*: En logisk graf är en riktad graf med noder av två slag, påståenden och definitioner, och pilar av två slag, implikationer och konstruktioner. Varje påståendenod innehåller minst ett påstående, samt eventuellt definitioner av ny notation. Varje påståendenod $A$ med ingående implikationspilar representerar påståendet $A_1 \wedge ... \wedge A_k \Rightarrow A$, där $A_1, ..., A_k$ är alla noder med implikationspil till $A$.
Definitionsnoder innehåller inga påståenden, men introducerar ny notation. En konstruktionspil från nod $B$ till nod $C$ betyder att i nod $C$ används explicit någon notation som är definierad i $B$. Ingen implikationspil slutar vid en definitionsnod, eftersom definitioner inte bevisas.



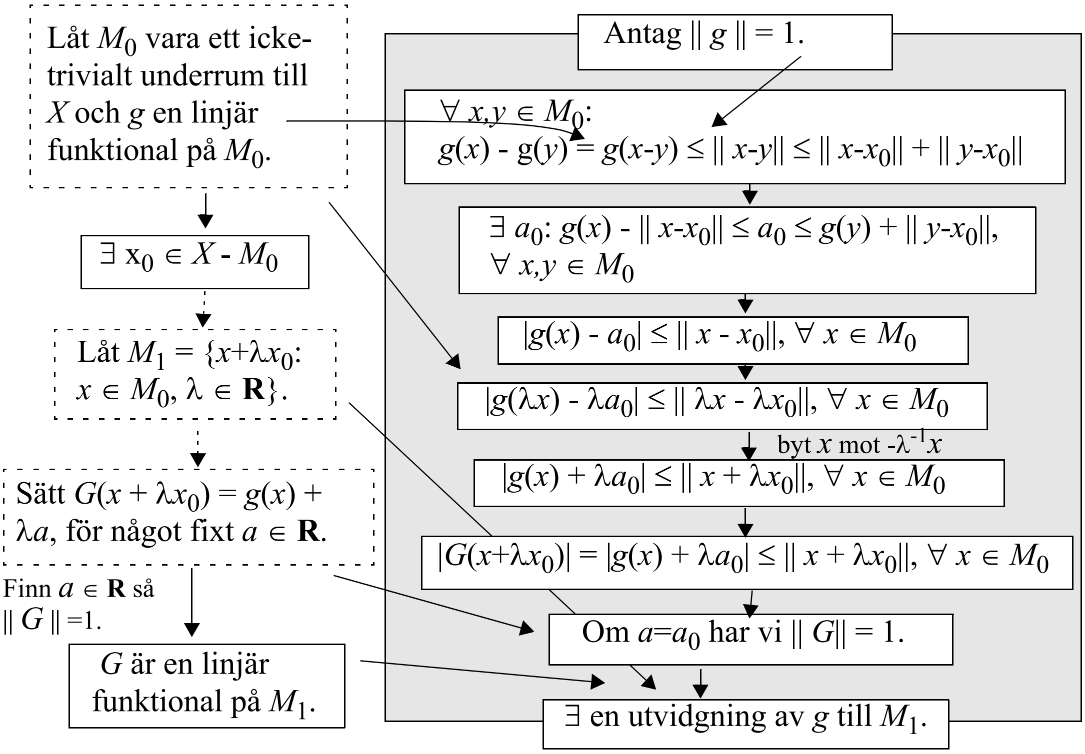

*Exempel 2.* Kartlagd teori: Grunderna i modulär aritmetik. Numrering är i enlighet med motsvarande kursbok.

En påståendenod kan formellt innehålla flera påståenden. Dessa behandlas alltid som ett enda - om noden innehåller påståendena $a_1, ..., a_j$ tolkas detta som det enda påståendet $A = a_1 \wedge ... \wedge a_j$. Notera att Definition 1 tillåter påståenden utan ingående implikationspilar - dessa är förutsättningar. Exempel 1 och Exempel 3 visar bevis av satser. Här är satsens förutsättningar och dess slutsatser påståenden som har särskilda roller jämfört med övriga påståenden i beviset - dessa noteras med fet ram för att förbättra överblicken över beviset.



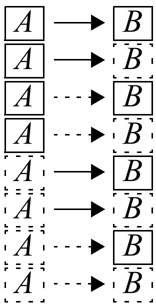

*Exempel 3.* Bevis av Hahn-Banachs sats, ett fundamentalt resultat i funktionalanalys.

I Exempel 2 visas sammanhanget mellan satser och definitioner i en teori med hjälp av en logisk graf. Ibland behöver man på nytt formulera satser eller definitioner som redan är formulerade tidigare. Att detta är något som “kommer utifrån” kan noteras genom att en sida saknas i rutan runt den upprepade formuleringen (se Exempel 1, 2 och 3).




*Exempel 4.* Återstående underbevis av Hahn-Banachs sats.

Följande tabell anger i korthet samtliga kombinationsmöjligheter av de två slagen av noder och de två slagen av kanter och motsvarande betydelse - tabellen kan ses som ett förtydligande av Definition 1.



| |
|---|
| Påstående i $B$ är sant om påstående i $A$ är sant. |
| Otillåtet. |
| Definition i $B$ använder definition i $A$. |
| Definition i $B$ använder definition i $A$. |
| Påstående i $B$ använder definition i $A$. |
| Otillåtet. |
| Definition i $B$ använder definition i $A$. |
| Definition i $B$ använder definition i $A$. |

*Tabell 5.* Tänkbara kombinationer av definierad grafisk notation med tolkningar.

Som synes gäller konstruktioner enbart samband mellan definitioner. Där en implikation förekommer är däremot alltid något påstående inblandat. Två fall är otillåtna på grund av att definitioner inte bevisas.

Vi behöver några fler formella verktyg för att rättfärdiga påståendet att logiska grafer kan användas för att presentera alla bevis. Ibland gör vi antaganden i bevis. Ett sådant fall är motsägelsebevis. Ett annat fall är om vi tar hand om olika fall med olika bevismetoder. Detta kräver ett par definitioner till, av vilka den första är logisk undergraf:

*Definition 2*: En logisk undergraf är en undergraf till en logisk graf, omgiven av en gränslinje, som har ett påstående formulerat i en ingångsnod och ett annat påstående formulerat i en utgångsnod, dessa är alltså påståendenoder. Påståenden innanför gränslinjen gäller om ingångsnoden är sann. En implikationpil får endast korsa en gränslinje från utsidan till insidan.

I Exempel 1 bevisas en ekvivalens: två påståendenoder skiftar här roll som förutsättning och som slutsats. De två bevisen svarar mot vänster respektive höger del av grafen, vilka är två undergrafer. Pilarnas riktning visar vad som är förutsättning och vad som är slutsats, dvs vad som är ingångs- resp. utgångsnod. Påståenden och definitioner mellan undergraferna gäller "utanför" undergraferna: oberoende av satsens förutsättningar.

*Definition 3*: Ett motsägelsebevis är en undergraf till en logisk graf som har en utgångsnod Falskt. Om vi kallar ingångsnoden $A$, detta är antagandet som ger upphov till en motsägelse, så ger detta $\neg A$. Med ett begränsat missbruk av tidigare definierad notation betecknas detta enklast som implikation från ingången $A$ och utgången Falskt.

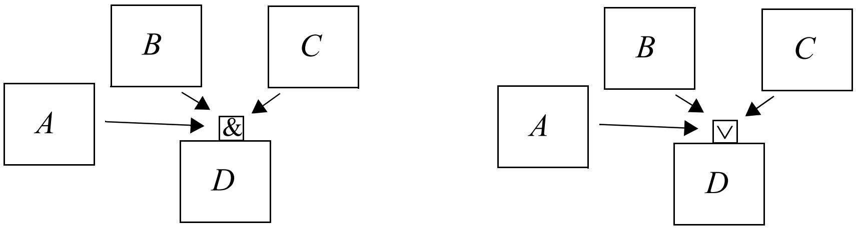
Ett exempel på ett motsägelsebevis finns i Exempel 3.
Ett bevis uppdelat i olika fall kan bestå av en undergraf för varje fall. Antag att vi vill bevisa $A$, och gör antagandena $C_1$, ..., $C_k$ där $C_1 \vee \ ... \ \vee C_k \Leftrightarrow$ Sant. Detta ger $k$ undergrafer med med ingångsnoder $C_i$ och utgångsnoder $A$. Vi bevisar således $C_i \Rightarrow A$ för alla $i$: $1 \leq i \leq k$, och $A$ följer.
Varje enskilt fall behöver inte nödvändigtvis skrivas ut som en undergraf. I beviset av Hahn-Banach sats innehåller fallet $\| g \| =1$ den huvudsakliga svårigheten. Fallet $\| g \| = 0$ är tillräckligt enkelt för att behandlas i en enda påståendenod, vilket kanske också gäller för fallet $\| g \| > 0$, $\| g \| \neq 1$. Varje presentationsmetod bör erbjuda ett enkelt sätt att representera vanliga och bekväma typer av resonemang. Det är viktigt att en presentationsmetod inte begränsar uttrycksfriheten i onödan med konstlade regler. Huvudsyftet med logiska grafer är tydlighet och bekväm formulering.
Slutledningar är inte tillåtna mellan undergrafer, eftersom vi i olika undergrafer har olika uppsättningar av antaganden. Det är tillåtet att ha undergrafer i en undergraf. Genom att definiera den inre sidan av randen till en undergraf på det naturliga sättet, kan vi sammanfatta vilka implikationer som är tillåtna i följande gränskorsningsregel:

*Gränskorsningsregel*: En implikation får korsa ett godtyckligt antal gränser, men varje korsning måste ske från utsidan och inåt.

Denna gränskorsningsregel utesluter cirkelbevis. I ett cirkelbevis används ett antagande till att bevisa påståenden som i sin tur används för att bevisa antagandet. Antagandet kommer i logisk grafform att ge upphov till en undergraf, och för att använda konsekvenser från detta till att bevisa antagandet "utifrån" kommer med nödvändighet gränskorsningregeln att överträdas. Det är klart från definitionen av undergraf att ett ingångsantagande givetvis inte kan bevisas vara sant från påståenden i samma undergraf.
Utöver här demonstrerad struktur kan kommentarer skrivas som oinramad text i anslutning till noder eller implikationer, för att beskriva bevismetod, ange syfte eller intuitiv tolkning med definitioner, osv, lämpligen noterade med mindre stil. De givna logiska graferna innehåller flera exempel på detta.

# Kommentarer till definitionerna

**“och” och/eller “eller”.** Lägg märke till att, enligt Definition 1, implikationspilarna med tillhörande noder tillsammans bildar ett implikationspåstående. Implikationspilarna som leder till samma påståendenod bör därför betraktas som en grupp. De uttrycker tillsammans ett påstående, medan en delmängd av dessa normalt inte implicerar påståendet. Detta formuleras i Definition 1.
Om man så vill kan både “och”- och “eller”-operationerna lätt noteras som i Exempel 6. De logiska sambanden i bevis och teorier formuleras emellertid naturligt med “och”- operationer; om en uppsättning av förutsättningar alla är sanna är ett resulterande påstående också sant. Därför behövs inte “eller” för syftet att kartlägga bevis och teorier.




*Exempel 6.* Möjlig grafisk notation av $A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$ respektive $A \vee B \vee C \Rightarrow D$.

**Teorigrafer och bevisgrafer.** När logiska grafer används för att presentera en teori är påståendenoderna lemman och satser. Axiom bör vara definitioner som saknar inkommande konstruktioner. Emellertid, förklaring av axiom kan behöva mera primitiva definitioner. Exempelvis är det klart att axiomen för en grupp i gruppteori bygger på funktionsbegreppet, vilket därmed bör definieras först.
När logiska grafer används för att presentera ett matematiskt bevis, så är noderna steg i beviset, valda efter lämplig nivå av tydlighet. Den grundläggande regeln här är naturligtvis Aristoteles regel: varje steg bör vara evident. I bevisgrafer finns det en samling påståendenoder som är speciell - antagandena, som inte har några inkommande implikationer. En annan särskild mängd är slutsatserna. Dessa speciella påståendenoder görs som nämnts extra synliga, exempelvis med fet ram.
Exempel 1 visar två bevis, eftersom satsen formulerar ett “om och endast om“-resultat är rollerna som förutsättning och slutsats utbytta i de två bevisen. Pilarnas riktning visar vad som är förutsättning och vad som är slutsats.
**Mål: maximal tydlighet.** Syftet med logiska grafer är inte att atomisera argumentationen så långt som möjligt, att göra allt till en graf som kan göras till en graf. Det övergripande målet är att framställa argumentationen så tydligt som möjligt, vilket ibland bäst låter sig göras genom att tillåta många komponenter, påståenden och definitioner inom samma påståendenod. Detta låter sig göras utan att störa de formella kraven. Konstruktören har stor frihet vid design av logiska grafer. Vad som är evident och vad som inte är det, är naturligtvis mycket beroende på auditoriet/läsekretsen. Liksom vid bevis presenterade i berättande form, kan konstruktören fritt välja grad av detaljexponering.
**Vad är påstående, vad är definition?** I de exempel på logiska grafer som är presenterade här kan man observera att gränsen mellan definitioner och påståenden inte är fullständigt skarp, den dominerande karaktären har noterats i graferna. Ibland kan man ifrågasätta om en definition är möjlig, om ett väldefinierat objekt är definierat. I så fall är det också ett påstående. Omvänt introduceras ny notation på ett praktiskt sätt i samband med vissa påståenden. Ett exempel är verbet “ta” som är påståendet “det existerar“, men vanligen används för att introducera ett namn för ett matematiskt objekt. Om existensen inte är självklar bör en dylik nod

formuleras som en påståendenod.
**Hypertext.** Att dela in ett bevis i underbevis leder tanken till hypertextapplikationer. I sådant fall kan läsaren själv helt och hållet välja detaljnivå.
**Relation mellan definitioner.** Konstruktioner är utan tvekan en del av matematik. Om notation från definition $D_1$ används i definition $D_2$, så finns otvivelaktigt ett speciellt formellt förhållande mellan dessa två definitioner. Emellertid saknas ett allmänt använt begrepp för denna typ av relation. Det är intressant att notera hur en annorlunda men ekvivalent formell representation leder till annorlunda idéer och begrepp. Detta är naturligtvis en observation angående hur det mänskliga medvetandet arbetar.
**Bevis är graflika.** Vi vet alla att vägen från antaganden till slutsatser mycket sällan är rak och fri från förgreningar som en flaggstång, den är normalt mera lik en buske eller en djungel. Grafbegreppet är ett mycket naturligt begrepp för att fånga denna sakens natur.
**Behövs stadskartor?** Å andra sidan måste en föreläsare presentera en teori linjärt, eftersom tiden är linjär, åtminstone lokalt. Man kan då fråga sig: bör matematiska texter vara nedskrivna föreläsningar, som reflekterar tidens form, eller bör skriven presentation av matematik avspegla det matematiska innehållets struktur? En liknande fråga är: Behöver vi verkligen stadskartor? Kanske hittar vi rätt ställe i en stad lättare genom att använda en samling enbart verbala beskrivningar av gatunätet.

# Fördelar med formulering i logiska grafer

**1. Mera fullständigt.** I en berättande matematisk text kan man inte undvika att upprepa uttrycken "således", "det följer att" "därmed får vi" och andra synonyma uttryck långt oftare än vad som är stilistiskt önskvärt. För att förbättra den språkliga nivån är det kutym att i viss mån utelämna implikationer, vilket gör framställningen mindre fullständig. Naturligt språk kan inte användas att ge en fullständig beskrivning av logiken i matematiska bevis och samtidigt få en acceptabel prosa. En fullständig beskrivning av logiken med naturligt språk skulle ge en mycket tung och besvärlig framställning, vilket skulle göra innehållet mindre tillgängligt.
I en logisk graf ersätts samtliga dylika uttryck med implikationspilar. Som beskrivits ovan, i logisk grafform kan konstruktören behålla vilken grad av ofullständighet som önskas, allt efter vad som befrämjar franställningens klarhet. Författaren har också möjlighet att värdera implikationerna genom att beteckna väsentliga implikationer med pilar i fetstil och triviala implikationer med tunna pilar.

**2. Mera frihet för läsaren.** Om ett bevis presenteras med en logisk graf kan läsaren själv välja att börja med antagandet och ta ställning till de inledande omskrivningarna, eller att börja från slutet. I ett bevis i berättande form bestämmer väsentligen författaren i vilken ordning beviset skall läsas. En konsekvens av detta och fördel nummer 1 ovan är att läsaren snabbare kan separera det triviala från verkliga svårigheter, och koncentrera sig på verkliga problem. På grund av att den övergripande logiska strukturen är ständigt synlig ligger det också åtskilligt närmare till hands att begripa ett bevis som en enda idè. Om den ovan nämnda hypertextstrukturen tillämpas ökar läsarens valmöjlighet ytterligare.
**3. Mera begreppsmässigt korrekt.** Jag hävdar att en bild av detta slag är vad man försöker konstruera i huvudet när man studerar en matematisk teori.

**4. Mera oberoende av naturligt språk.** Logiska grafer gör det möjligt att presentera matematiska forskningsrapporter med mycket rudimentärt naturligt språk. Matematik tar därmed ett steg närmare att vara ett sant internationellt språk, emellertid givetvis ett språk för ett särskilt syfte. Detta kan väsentligt underlätta för matematiker som inte behärskar engelska. Emellertid kan rapporter helt fria från naturligt språk knappast rekommenderas, en kompletterande text bör som regel följa med graferna. Naturligt språk behövs av flera skäl, varav ett är att undvika nackdel nummer 2 nedan.

**5. Resultat först.** Om det är möjligt är det rekommendabelt att läsa en matematisk text bakifrån; att börja med resultaten och målen och därefter gå igenom konstruktionen som görs för att nå dessa mål. Detta är lättare att göra i logisk grafform, till en del på grund av konstruktionerna; det är lättare att spåra ett okänt begrepp bakåt till det är definierat i väl kända begrepp. Det är därmed lättare för en läsare att separera den kända från den okända delen av teorin.

Definition 3

Ett motsägelsebevis är en undergraf med utgångsnod Falskt, vilket validerar antagandets motsats.

Definition 2

En logisk undergraf är en undergraf av en logisk graf som har två påståendenoder där en är ingångsnod och den andra utgångsnod. I ingångsnoden formuleras ett antagande som gäller i hela undergrafen. Utgångsnoden innehåller ett påstående som gäller under antagandet.
Gränskorsningsregel: En implikation får korsa ett godtyckligt antal gränser, men varje korsning måste ske från utsidan och inåt.

Definition 0

$x$ är en föregångare till $y$ om $(x,y)\in A$ .

Definition 1 (logiska grafer)

En logisk graf är en riktad graf med noder av två slag, påståenden och definitioner, och kanter av två slag, implikationer och konstruktioner. Varje påståendenod innehåller åtminstone ett påstående, samt eventuellt definitioner av ny notation. Varje påståendenod $A$ representerar påståendet $A_1\wedge\ldots\wedge A_k \Rightarrow A$, där $A_1$, ..., $A_k$ är alla noder med implikationspil till $A$.
Definitionsnoder innehåller inga påståenden, men introducerar ny notation. En konstruktionspil från nod $B$ till nod $C$ betyder att i nod $C$ används explicit någon notation som är definierad i $B$. Ingen implikationpil slutar vid en definitionsnod.

Definition -1

En riktad graf $D = (V,A)$ är en ändlig mängd $V$ och en relation $A$ på $V$. Elementen i $V$ kallas noder, elementen i $A$ kallas riktade kanter eller pilar.

Definition -2

En relation $A$ på en ändlig mängd $V$ är en delmängd av $V\times V$, mängden av alla par.

*Exempel 7.* Logiska grafer som form och innehåll.

# Nackdelar med formulering i logiska grafer

**1. Kräver mer av läsaren.** Fördelen att ha mera frihet kan också vara en nackdel. Läsaren måste göra flera egna beslut, exempelvis från vilken ända ett bevis ska nystas upp. Logiska grafer ger något svagare ledning från författaren. Självfallet kan logiska grafer kompletteras med berättande text. Detta bör ändå huvudsakligen vara positivt - studenten utsätts för en frihet som bör bidra till dennes matematiska mognad.

**2. Mindre metodbeskrivning.** En berättande beskrivning av matematik innehåller ofta information som inte är strikt matematisk kunskap men ändå i hög grad väsentlig. Det kan vara information om metoder, hur resultaten har uppstått och med vilket mål i sikte som teorin har utvecklats, på vilket sätt intuitionen följer med formalismen. Den yttersta motiveringen för en definition är förstås att den fungerar. Hur definitioner väljs och bevismetoder upptäcks är en fråga om analogi, kreativitet och intuition, det är någonting "ovanför" strikt matematik. Det borde emellertid vara möjligt att leverera sådan information i kompletterande text.

# Logisk struktur konsistent med intutionen

**Ej nytt?** Det är säkert så att många matematiker har tänkt i banor av detta slag, och kanske gjort grafer liknande de här presenterade logiska graferna. Ett sådant förhållande gör det än mera tydligt att grafer är naturliga som presentationsmetod för logik, och det gör det än mera angeläget att formulera en *generell* grafisk presentationsmetod, någon sådan är ännu inte allmänt känd. Det är därmed också angeläget att få ner detta på papper för studenterna - vi kan inte vänta oss att de på egen hand ska utveckla tydliga och korrekta grafiska presentationsmetoder. Det kan tilläggas att ett 15-tal doktorandkurser i matematik utan svårighet har formulerats i logisk grafform, med enbart ovan definierade begrepp.
**Ej endast matematik.** Logiska grafer är inte begränsade till matematik. Dess specialitet är att presentera logiken för ett visst sammanhang, detta sammanhang måste inte nödvändigtvis vara matematik. Samtliga vetenskaper bör kunna göra sina resonemang lättillgängligare i denna form. Man kan vänta sig att modifikationer eller tillägg behövs om logiska grafer används för annat än matematik - exempelvis för empiriska verifikationer och kvantifiering av hur välbelagd en implikation är.
**Intuition, logik, lärande.** Mycket kan vinnas för matematikens framtid om studenterna lättare förstår matematikkurserna, och forskarna lättare sätter sig in i nya resultat. Hårt arbete kommer naturligtvis alltid att krävas, med varje presentationsmetod. Emellertid, med en presentationsmetod som är konsistent med intuitionen, kan arbetet gå snabbare och bli mera självbelönande. Den grundläggande idèn bakom logiska grafer kan beskrivas mycket kort som en särskild sorts bekvämlighet: att undvika att formulera ett påstående eller definition mer än en gång. När den dyker upp en gång till drar vi istället en pil från den första formuleringen - och en graf uppstår. Samtidigt kan det logiska förhållandet markeras.
**Noder för kommentarer, grafik, tillämpningar...** Logiska grafer kan kompletteras med mera struktur för exempelvis kommentarer, bevisidèer, intuitiva samband, analogier, geometriska figurer, osv. Överblicken över väsentligheterna försämras emellertid så fort ny struktur tillkommer, dessa bör således vara mycket väl motiverade.

# Några ord om logiska grafer i undervisningen

**Karta över textbok.** Om logiska grafer görs i anslutning till en specifik textbok så kan sido- och satsnumrering följa varje påståendenod. Detta ger en karta över boken, resultat och begreppsmässiga samband blir lättare att hitta.
**Det som återstår är insikt.** Att tillåta teorigrafer på tentamen innebär en fokusering på förståelse. Formuleringar av definitioner och satser finns tillgängliga, liksom implikationer, vilka ger information om vilka satser som bör användas i ett bevis. Vad som inte finns är bevis och lösningar till problem - vilket därmed är det naturliga innehållet på tentamen. Denna extra hjälp för studenterna ger möjlighet att utöka kursen i någon mån.

**Dechiffrera formalism.** Ett villkor för att studenten ska kunna använda teorigraferna är uppenbarligen att förstå den matematiska formalismen. Uppgiften för studenten under kursen kan då beskrivas som att dechiffrera teorigraferna, och föreläsningarna kan ha som mål att överbrygga intuition och formalism. Det är för övrigt väl känt att detaljkunskap överlever bättre om detaljernas plats i en övergripande bild är förstådd.